XXXVIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (1º de novembro de 2014)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

<u>Folha de Perguntas</u>

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

De acordo com a Wikipédia, aproximadamente 98% da Antártica está coberta por um manto de gelo, que possui em média dois quilômetros de espessura. Essa cobertura de gelo tem um volume estimado em 25,4 milhões de quilômetros cúbicos, contendo 70% de toda a água doce do planeta.

O Brasil apresenta 14% da água doce do planeta e desse volume, 80% encontra-se na região amazônica.

a) Baseando-se nesses dados, pode-se afirmar que mais de 10% da água doce do planeta está na região amazônica? Não se esqueça de justificar sua resposta.

b) Calcule o volume estimado de água doce na região amazônica.

PROBLEMA 2

As eleições para alguns cargos legislativos (vereador e deputados estaduais e federais) são feitas no Brasil usando o *sistema proporcional* de votos. A ideia é contar os votos para cada partido (ou coligação), independente do candidato, e dividir as vagas de modo que cada partido tenha uma quantidade de cadeiras aproximadamente proporcional ao total de votos. Só então se considera as votações individuais dos candidatos: as vagas são preenchidas pelos candidatos mais votados de cada partido.

Mas as contas ficam um pouco mais elaboradas quando consideramos as sobras. Como essas vagas são determinadas?

- Primeiro, calcula-se o *quociente eleitoral* Q, que é o total de votos válidos dividido pelo total de vagas.
- Depois, calcula-se o número de vagas para cada partido dividindo-se o número de votos de cada partido por Q. Os algarismos depois da vírgula são desprezados (mesmo se forem iguais a 5 ou mais).
- Geralmente sobram vagas para serem preenchidas, e fazemos isso preenchendo uma vaga de cada vez: divide-se o total de votos de cada partido pela quantidade de vagas obtidas por cada partido mais 1. O maior número fica com a primeira vaga. Fazemos o mesmo para a próxima vaga, tomando o cuidado de atualizar as quantidades de vagas a cada passo.

Por exemplo, suponha que na cidade de Matemopolina 4 partidos, PPM (Partido Paulista de Matemática), PBM (Partido Brasileiro da Matemática), PM (Partido da Matemática) e MAT (Matemáticos), estejam concorrendo a 16 vagas na Assembleia Matemática. Nessa eleição, os 8.890 votos válidos foram distribuídos da seguinte forma:

PPM	PBM	PM	MAT
1.618	3.140	2.718	1.414

O quociente eleitoral é

$$Q = \frac{8890}{16} = 555{,}625$$

Deste modo, as quantidades de vagas são

PPM	PBM	PM	MAT
$\frac{1.618}{555{,}625} \approx \boxed{2}{,}91$	$\frac{3.140}{555{,}625} \approx \boxed{5}{,}65$	$\frac{2.718}{555{,}625} = \boxed{4}{,}89$	$\frac{1.414}{555{,}625} = \boxed{2}{,}54$

Com isso, preenchemos $2 + 5 + 4 + 2 = 13$ vagas. Faltam $16 - 13 = 3$. A seguinte tabela indica como as duas vagas seguintes são atribuídas:

PPM	PBM	PM	MAT	Dono da vaga
$\frac{1.618}{2+1} \approx 539{,}3$	$\frac{3.140}{5+1} \approx 523{,}3$	$\frac{2.718}{4+1} = 543{,}6$	$\frac{1.414}{2+1} = 471{,}3$	PM
$\frac{1.618}{2+1} \approx 539{,}3$	$\frac{3.140}{5+1} \approx 523{,}3$	$\frac{2.718}{5+1} = 453$	$\frac{1.414}{2+1} = 471{,}3$	PPM

a) Para que partido é atribuída a última vaga dessa eleição?

b) Ocorreu outra eleição, agora para a Câmara dos Matemadores na cidade de Matemalinos. São somente 9 vagas, e os resultados foram os seguintes:

PPM	PBM	PM	MAT
1.900	1.350	550	2.250

Quantas vagas ficaram para cada partido nessa eleição? Não se esqueça de mostrar os seus cálculos.

PROBLEMA 3

Dominó é um jogo formado por peças de dimensões 1×2, cada uma tendo dois números, ambos entre 0 e 6. Há exatamente 28 peças, que são todos os pares possíveis de dois números de 0 a 6, cada par exatamente uma vez. Um passatempo criado utilizando as peças do dominó é formar um tabuleiro 7×8 de números variando de 0 a 6 e cobri-lo usando exatamente uma vez cada um dos 28 dominós.

a) Considere o tabuleiro de números abaixo em que alguns dominós já estão marcados.

6	2	5	3	6	6	3	1
2	1	1	2	1	6	2	5
3	0	5	2	6	3	0	4
4	3	6	0	4	3	5	6
3	6	5	1	0	0	4	1
2	0	3	0	2	4	0	4
5	1	4	4	5	5	1	2

Alguns dos dominós em princípio só têm um lugar para serem marcados no tabuleiro (por exemplo, o 4-4, que já está marcado), e outros não, como o 2-1 (só na segunda linha há dois possíveis lugares para ele).

Preencha o tabuleiro na *Folha de Respostas* com os 28 dominós. Não se esqueça: não pode ter dominó repetido!

b) Considere agora o tabuleiro a seguir e determine uma maneira de cobri-lo com dominós.

0	5	4	6	3	5	6	6
3	1	6	1	0	0	1	2
6	0	2	4	4	2	2	3
3	3	2	6	5	0	4	2
1	5	6	3	4	1	2	6
4	1	0	1	3	0	4	5
5	1	3	4	0	5	5	2

c) Existem quantas maneiras diferentes de cobrir o tabuleiro do item b usando os dominós?

PROBLEMA 4

Nessa questão estudaremos uma aplicação de identidades polinomiais à fatoração de números grandes, bem grandes!

Em 1871, Léon François Antoine Aurifeuille obteve a fatoração $2^{58} + 1 = 536838145 \cdot 536903681$ a partir da observação de que, quando substituímos $x = 2^{29}$ na identidade $x^2 + 1 = (x + 1)^2 - 2x$, teremos

$$2^{58} + 1 = (2^{29} + 1)^2 - 2 \cdot 2^{29} = (2^{29} + 1)^2 - (2^{15})^2 = (2^{29} + 1 - 2^{15}) \cdot (2^{29} + 1 + 2^{15})$$

(*no desenvolvimento acima, utilizamos também a identidade* $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$.)

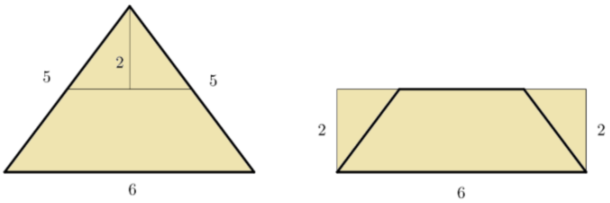
Vale a pena citar que, de fato, a fatoração em primos de $2^{58} + 1$ é $5 \cdot 107367629 \cdot 536903681$.

Tal abordagem deu origem às denominadas *Fatorações Aurifeullianas* um ramo bastante rico da Teoria dos Números.

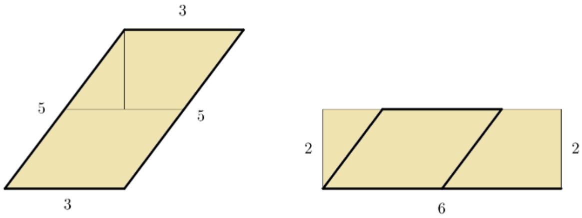
a) Desenvolva a expressão $(x + 1)((x + 1)^2 - 3x)$.

b) Utilizando a identidade (*Fatoração Aurifeulliana*) obtida no item a, apresente a fatoração em primos de 27000001.

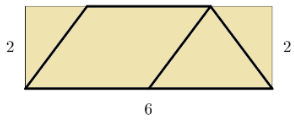
PROBLEMA 5
Duas figuras são chamadas de *isoparamétricas* quando têm o mesmo perímetro e a mesma área. Uma propriedade surpreendente das figuras isoparamétricas é que podemos cortar uma delas e rearranjar os pedaços para montar a outra.
Por exemplo, o triângulo e o retângulo a seguir são isoparamétricos, pois as duas figuras têm mesmo perímetro 16 e mesma área 12. Note também que o triângulo pode ser recortado, como indicado, para montar o retângulo ao lado.



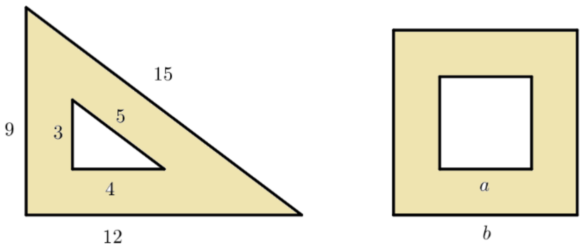
A seguir mostramos como um paralelogramo pode ser recortado para montar o mesmo retângulo:



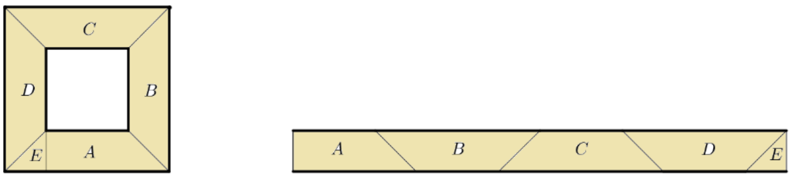
Veja que sobrepondo os dois recortes do retângulo podemos dividi-lo em quatro pedaços que podem montar tanto o triângulo da primeira figura quanto o paralelogramo da segunda.



a) Um *anel* é a figura formada quando um polígono P tem um polígono menor P' semelhante a ele cortado em seu interior. Por exemplo, um anel quadrado é formado quando se corta um quadrado menor de dentro de um quadrado maior.
O conceito de figuras isoparamétricas não se aplica apenas aos polígonos: podemos ter *anéis isoparamétricos*; nesse caso o perímetro do anel é a soma dos perímetros interno e externo da figura formada. Por exemplo, o perímetro do anel triangular abaixo é $(9 + 12 + 15) + (3 + 4 + 5) = 48$.
Determine as medidas a e b dos lados interno e externo do anel quadrado que é isoparamétrico ao anel triangular.



b) Nos anéis da figura do item a, vamos supor que os vértices internos estão nas bissetrizes dos polígonos externos e que cada lado interno tem distância fixa para o lado externo correspondente. Veja que é possível recortar o quadrado em 5 pedaços para montar um retângulo cujos lados superior e inferior são os segmentos do perímetro do anel quadrado.



Mostre uma maneira de cortar o anel triangular em **quatro** pedaços que podem ser usados para montar um retângulo congruente ao retângulo montado acima.
c) Mostre como cortar o anel triangular em 10 pedaços e rearranjando esses 10 pedaços montar o anel quadrado, de modo que os segmentos que formavam o perímetro do anel triangular passem a formar o perímetro do anel quadrado.