XXXVII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (9 de novembro de 2013)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Sitaram Asur e Bernardo Huberman, pesquisadores de mídias sociais, obtiveram, através de dados coletados no Twitter em 2010, uma equação que permite prever as vendas de bilheteria de filmes. A equação tinha uma precisão tão grande que superava as principais ferramentas de previsão na época. A equação tem a forma:

$$y = 0{,}015 \cdot A + 1{,}6 \cdot P + 0{,}003 \cdot N$$

em que

- y é a previsão de ganho com a venda de ingressos do filme, em milhões;
- A é a *atenção* gerada pelo filme, em tweets (mensagens) por hora, ou seja, é a quantidade média de tweets que se referem ao filme por hora;
- P é a *polaridade*, que é a razão entre as quantidades de tweets positivos (de pessoas que gostaram do filme) e tweets negativos (de pessoas que não gostaram do filme): $P = \frac{\text{tweets positivos}}{\text{tweets negativos}}$;
- N é a quantidade de cinemas em que o filme está sendo exibido.

Por exemplo, *Crepúsculo: Lua Nova* estava em 4024 cinemas nos EUA, obtendo um total de aproximadamente 43 milhões de dólares na segunda semana. Nessa semana, esse filme teve atenção de 259360 tweets, dando $\frac{259360}{7 \cdot 24} \approx 1543{,}8$ tweets por hora. Destes, 216135 foram positivos e os demais $259360 - 216135 = 43225$ foram negativos, dando uma polaridade de $\frac{216135}{43225} \approx 5{,}0$. A equação previa $y = 0{,}015 \cdot 1543{,}8 + 1{,}6 \cdot 5{,}0 + 0{,}003 \cdot 4024 = 43{,}229$ milhões de dólares. Nada mal!

a) O filme *Avatar*, na sua segunda semana em cartaz, estava em 3456 cinemas norte-americanos. Na Internet, 713195 tweets falavam sobre o filme nessa semana, dos quais 475463 foram positivos. Considerando o modelo, quantos milhões de dólares o filme arrecadou?

b) Um filme que melhorou muito sua arrecadação foi *Um Sonho Possível*. Ele estava em 3110 cinemas nos EUA na sua segunda semana. Se ele mantivesse sua polaridade inicial de 5, conseguiria 32,33 milhões de dólares segundo o modelo. Porém a reação ao filme foi muito positiva, e sua polaridade foi para 9,65. Para quanto foi sua arrecadação, de acordo com o modelo?

PROBLEMA 2

Os números reais podem ser expressos na forma de *frações contínuas*, isto é, na forma:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

em que a_0 é inteiro e $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são inteiros positivos. Utiliza-se a notação $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$

Por exemplo, para escrever $\frac{2013}{37}$ na forma de fração contínua, inicialmente, calculamos o maior inteiro menor ou igual a esse racional. Esse é o a_0. Assim:

$$\frac{2013}{37} = 54 + \frac{15}{37} = 54 + \cfrac{1}{\frac{37}{15}}$$

E repetimos o processo agora para $\frac{37}{15}$ e, assim por diante, obtendo $a_1, a_2, a_3, \ldots$

$$\frac{2013}{37} = 54 + \frac{15}{37} = 54 + \cfrac{1}{\frac{37}{15}} = 54 + \cfrac{1}{2 + \frac{7}{15}} = 54 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{15}{7}}} = 54 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{7}}}$$

Temos então que $\frac{2013}{37} = [54; 2,2,7]$. Pode-se demonstrar que todo racional tem uma representação finita (com um número finito de a_i's) como fração contínua.

As coisas ficam ainda mais interessantes quando consideramos os números irracionais. Cada irracional possui uma representação única como fração contínua a qual é infinita. E, quando a truncamos, ela fornece as melhores aproximações racionais para ele.

Por exemplo, $\pi = 3{,}14159265\ldots = [3; 7,15,1,292,1,1,1,2,1,3, \ldots]$. Adotando

$$\pi \approx [3; 7,15,1] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots$$

obtemos uma excelente aproximação!

Uma questão extremamente interessante da teoria de frações contínuas é: quais números têm uma representação periódica quando escritos dessa maneira? Por exemplo, qual número real tem a representação $[1; 1,1,1, \ldots] = [1; \overline{1}]$?

Seja

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Então podemos observar que (verifique) $x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ e, como x é positivo, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a razão áurea!
E como é a representação de $\sqrt{3}$? Fazemos o procedimento usual. O maior inteiro menor do que $\sqrt{3}$ é 1. Assim:

$$\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3} - 1) = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1}}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{\mathbf{3}} + \mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{3} - 1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{\mathbf{3}} + \mathbf{1}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1})}}$$

Repetindo as passagens acima:

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1})}}}}$$

E assim por diante. Ou seja, $\sqrt{3} = [1; 1,2,1,2, \dots] = [1; \overline{1,2}]$.

a) Escreva a representação de $\frac{2017}{41}$ como fração contínua.

b) Escreva a representação de $\sqrt{11}$ como fração contínua e conclua que $\sqrt{11} \approx \frac{199}{60}$.

PROBLEMA 3

Em 1824 o matemático norueguês Niels Henrik Abel (05/08/1802 – 06/04/1829) demonstrou que não é possível resolver a equação de quinto grau ($ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$) utilizando radicais, ou seja, existem valores dos coeficientes para os quais não é possível expressar as soluções da equação em termos de alguma fórmula envolvendo adições, subtrações, multiplicações, divisões, potências ou raízes quadradas, cúbicas, quínticas, etc. Tais fórmulas existem para as equações até quarto grau (lembra-se da fórmula do delta para a equação do segundo grau?) e foi uma grande conquista para a Ciência a demonstração dessa impossibilidade. Nessa mesma época, outro matemático, Évariste Galois (25/10/1811 – 31/05/1832), demonstrou esse mesmo resultado utilizando ideias que são de extrema relevância no desenvolvimento da Matemática desde então.
Nesta questão, vamos explorar um pouco as ideias de Abel e esperamos que vocês aprofundem os seus estudos para que possam entender a incrível colaboração desses dois gigantes para o desenvolvimento da Matemática.

Nos parágrafos iniciais de seu trabalho de 1824, Abel escreveu:
"Seja $y - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0$ uma equação genérica do quinto grau e suponha que ela é solúvel algebricamente, ou seja, podemos expressar y por uma função formada por radicais das quantidades a, b, c, d, e.
É claro que que nesse caso podemos expressar y na forma $y = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$, m sendo um número primo e R, p, p_1, p_2, etc. funções da mesma forma que y e, assim por diante, até chegarmos a funções racionais das quantidades a, b, c, d, e."
E um pouco mais a frente, depois de demonstrar que podemos tomar $p_1 = 1$:
"Substituindo o valor de y na equação inicial e manipulando, nós obtemos um resultado da forma $P = q + q_1 R^{\frac{1}{m}} + q_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + q_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$, em que q, q_1, q_2, etc. são polinômios nas quantidades $a, b, c, d, e, p, p_2, \dots$ e R.
Para que a equação seja válida, é necessário que $q = 0, q_1 = 0, q_2 = 0, \dots, q_{m-1} = 0$."
Assim, a chamada *fórmula de Abel* para uma solução da equação de segundo grau $y^2 + by + c = 0$ é $y = p + R^{\frac{1}{2}}$. Substituindo na equação,

$$\left(p + R^{\frac{1}{2}}\right)^2 + b\left(p + R^{\frac{1}{2}}\right) + c = 0 \Leftrightarrow (p^2 + R + bp + c) + (2p + b)R^{\frac{1}{2}} = 0$$

Então, pelo fato citado no final do trecho do trabalho de Abel mostrado anteriormente,

$$\left|\begin{array}{l} p^2 + R + bp + c = 0 \\ 2p + b = 0 \end{array}\right.$$

a) Resolva o sistema acima nas incógnitas p e R e conclua que

$$y = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

É possível demonstrar que a *fórmula de Abel* para uma solução da equação de terceiro grau (incompleta) $y^3 + cy + d = 0$ é $y = R^{\frac{1}{3}} + p_2 R^{\frac{2}{3}}$. Utilizando essa fórmula e o fato citado no trecho do trabalho de Abel, vamos nos próximos itens encontrar uma raiz da equação $y^3 - 6y - 6 = 0$.

b) Substitua a fórmula de Abel em $y^3 - 6y - 6$ e obtenha uma expressão da forma $A + B \cdot R^{\frac{1}{3}} + C \cdot R^{\frac{2}{3}}$.

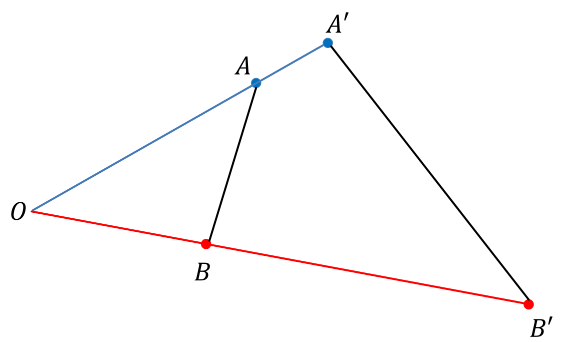
Dica: Nesse item você pode querer utilizar que $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ e que $R^{\frac{4}{3}} = R \cdot R^{\frac{1}{3}}$ e $R^{\frac{5}{3}} = R \cdot R^{\frac{2}{3}}$.

c) Resolvendo o sistema $A = 0$ *e* $B = 0$ *e* $C = 0$, determine p_2, R e obtenha uma raiz da equação $y^3 - 6y - 6 = 0$.

PROBLEMA 4

Uma *transformação geométrica no plano* é uma operação que transforma pontos do plano em pontos do plano. A rotação e a reflexão são dois exemplos de transformações geométricas. Nesse problema veremos outra transformação geométrica, a *inversão*.

Dados um ponto O, denominado *centro de inversão*, e um real positivo k, o *inverso de um ponto* $P \neq O$ é o ponto P' na semirreta $\overrightarrow{OP}$ tal que $OP' = \frac{k}{OP}$ (entendeu o nome "inversão"?). A inversão transforma uma figura em outra; alguns círculos viram retas e vice-versa, entre outras propriedades interessantes. Na figura a seguir, A' e B' são os inversos dos pontos A e B:

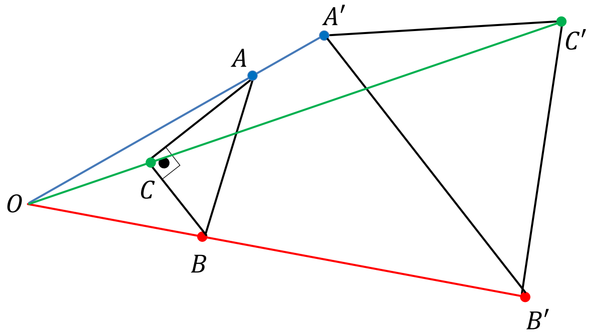


a) Mostre que os triângulos OAB e $OB'A'$ são semelhantes.

b) Prove que $AB = \frac{k \cdot A'B'}{OA' \cdot OB'}$.

c) O que acontece quando "invertemos" o teorema de Pitágoras? Nesse item, iremos aprender.

Na figura a seguir, ABC é um triângulo retângulo em C e A', B' e C' são os inversos de A, B e C com centro em O.



c.1) Calcule $m\left(O\widehat{B'}C'\right) + m\left(O\widehat{A'}C'\right)$ e $m\left(A'\widehat{O}B'\right) + m\left(A'\widehat{C'}B'\right)$.

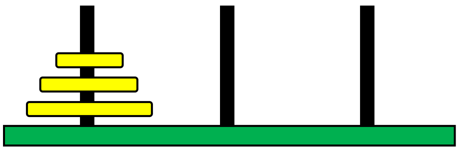
c.2) Prove que a soma dos quadrados dos produtos dos lados opostos do quadrilátero $OB'C'A'$ é igual ao quadrado do produto de suas diagonais, ou seja,

$$OA'^2 \cdot B'C'^2 + OB'^2 \cdot C'A'^2 = OC'^2 \cdot A'B'^2.$$

PROBLEMA 5

Neste problema iremos apresentar o *Algoritmo de Frame-Stewart* que resolve uma generalização do problema das Torres de Hanói.

Vamos relembrar/conhecer o problema das Torres de Hanói. O quebra-cabeça consiste de três pinos verticais presos a uma base e discos de diferentes diâmetros empilhados neles. Inicialmente, todos os discos estão em único pino, colocados em ordem decrescente de tamanho, de modo que o menor disco esteja no topo da pilha.



Toda a pilha de discos deve ser movida para outro pino, obedecendo às seguintes duas regras:

• Somente um disco pode ser movido de cada vez.

• Um disco nunca pode ficar sobre um disco menor.

O número mínimo de movimentos para mover uma pilha com n discos é $2^n - 1$ utilizando o algoritmo recursivo que descreveremos abaixo:

Nomeamos os três pinos *início*, *fim* e *meio*. Para mover n discos do pino início para o pino fim, fazemos o seguinte:

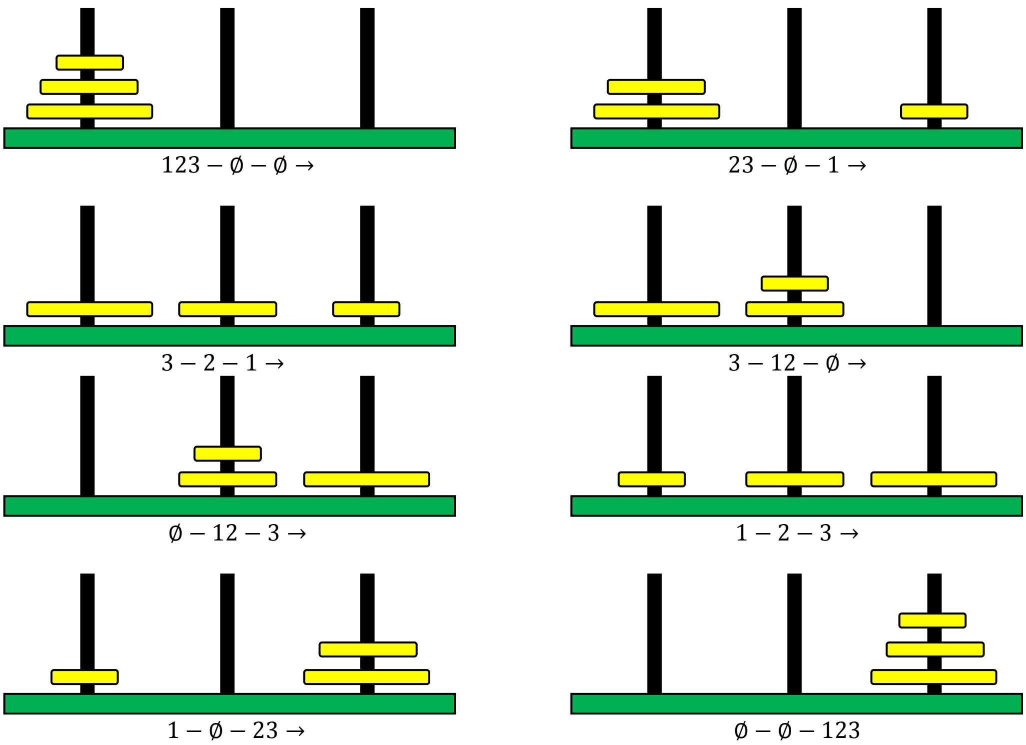
• Se $n = 1$, movemos o disco diretamente do pino início para o pino fim.

• Se $n > 1$:

(i) Utilizando o procedimento obtido para $n - 1$ pinos, movemos todos os discos exceto o último do pino início para o pino meio (aqui, quando $n \geq 3$, teremos de utilizar o pino fim para o procedimento).

(ii) Movemos o n-ésimo disco do pino início para o pino fim.

(iii) Utilizando o procedimento obtido para $n - 1$ discos, movemos todos os $n - 1$ discos do pino meio para o pino fim.



Em 1939, a revista *American Mathematical Monthly* trouxe em sua seção de problemas uma generalização do problema das Torres de Hanói, solicitando uma solução do problema para n discos e k pinos. Em 1941, a mesma revista publicou duas soluções equivalentes, por *J. S. Frame* e pelo autor do problema, *B. M. Stewart*. Essas soluções constituem o que é conhecido atualmente como *Algoritmo de Frame-Stewart* que mostraremos para o caso em que há 4 pinos.

Os valores de $R(n)$, número de movimentos necessários para resolver o problema da Torre de Hanói para n discos e 4 pinos utilizando o algoritmo de Frame-Stewart, são obtidos como se segue: $R(1) = 1$ e, para $n \geq 2$, escolhemos um inteiro k, $0 \leq k < n$, que minimiza o número de movimentos usados no seguinte procedimento:

(i) Mova os k discos do topo do pino início para um dos pinos meio (agora há dois). Isso pode ser feito em $R(k)$ movimentos. Observe que os $n-k$ discos maiores não interferem nos movimentos.

(ii) Mova os $n-k$ discos restantes do pino início para o pino fim. Como um dos pinos meio está ocupado por discos menores (colocados ao final dos movimentos descritos em i), ele não pode ser usado e temos a nossa disposição apenas 3 pinos e, portanto, utilizando o algoritmo mostrado anteriormente, serão necessários $2^{n-k}-1$ movimentos.

(iii) Mova os k discos menores para o pino fim em $R(k)$ movimentos. O problema fica, então, resolvido em $2R(k) + 2^{n-k} - 1$ movimentos.

Assim, é imediato que $R(2) = 3$ e a tabela a seguir mostra que $R(3) = 5$ (tomamos $k = 1$) e $R(4) = 9$ (podemos tomar $k = 1$ ou $k = 2$).

n	k	$2R(k) + 2^{n-k} - 1$
3	1	$\mathbf{2 \cdot 1 + 2^2 - 1 = 5}$
3	2	$2 \cdot 3 + 2^1 - 1 = 7$
4	1	$\mathbf{2 \cdot 1 + 2^3 - 1 = 9}$
4	2	$\mathbf{2 \cdot 3 + 2^2 - 1 = 9}$
4	3	$2 \cdot 5 + 2^1 - 1 = 11$

Atenção pessoal! Finalmente chegaram as perguntas!

a) Mostre que, de fato, o número mínimo de movimentos para resolver o quebra-cabeça quando temos 4 pinos e 4 discos é 9. Ou seja, não é possível resolvê-lo em 8 movimentos ou menos.

b) Preenchendo a tabela que está na folha de respostas, verifique que $R(5) = 13$ e $R(6) = 17$.

c) Abaixo mostramos a maneira correspondente de resolver o problema quando temos 4 discos e utilizamos $k = 2$.

$$1234 - \emptyset - \emptyset - \emptyset \to 234 - 1 - \emptyset - \emptyset \to 34 - 1 - 2 - \emptyset \to 34 - \emptyset - 12 - \emptyset$$
$$\to 4 - 3 - 12 - \emptyset \to \emptyset - 3 - 12 - 4 \to \emptyset - \emptyset - 12 - 34$$
$$\to \emptyset - 1 - 2 - 34 \to \emptyset - 1 - \emptyset - 234 \to \emptyset - \emptyset - \emptyset - 1234$$

Exiba uma sequência de movimentos que resolva o problema quando temos 4 pinos e 5 discos em 13 movimentos. Utilize a notação mostrada no exemplo dado.

d) Observe:

$R(1) = 2^0$

$R(2) = 2^0 + \mathbf{2^1}$

$R(3) = 2^0 + \mathbf{2^1 + 2^1}$

$R(4) = 2^0 + \mathbf{2^1 + 2^1} + 2^2$

$R(5) = 2^0 + \mathbf{2^1 + 2^1} + 2^2 + 2^2$

$R(6) = 2^0 + \mathbf{2^1 + 2^1} + 2^2 + 2^2 + 2^2$

E pode-se verificar que:

$R(7) = 2^0 + \mathbf{2^1 + 2^1} + 2^2 + 2^2 + 2^2 + \mathbf{2^3}$

$R(8) = 2^0 + \mathbf{2^1 + 2^1} + 2^2 + 2^2 + 2^2 + \mathbf{2^3 + 2^3}$

$R(9) = 2^0 + \mathbf{2^1 + 2^1} + 2^2 + 2^2 + 2^2 + \mathbf{2^3 + 2^3 + 2^3}$

$R(10) = 2^0 + \mathbf{2^1 + 2^1} + 2^2 + 2^2 + 2^2 + \mathbf{2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3}$

$R(11) = 2^0 + \mathbf{2^1 + 2^1} + 2^2 + 2^2 + 2^2 + \mathbf{2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3} + 2^4$

Supondo que esse padrão seja válido até $R(2012)$, determine os valores de k, $0 \leq k < 2013$, tais que $2R(k) + 2^{2013-k} - 1 \geq 2R(k+1) + 2^{2013-(k+1)} - 1$ e conclua que o padrão também é válido para $R(2013)$.

Nessa questão, você pode desejar utilizar que $2^a \geq 2^b$ é equivalente a $a \geq b$.

Pode também ser útil saber que, para m inteiro positivo, $1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$.