XXXVI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (10 de novembro de 2012)
Nível γ(1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

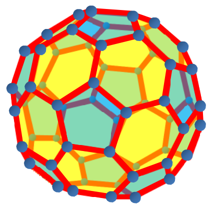
www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Na década de 80, os químicos sintetizaram os *fulerenos*, que são moléculas de carbono. Neles cada átomo de carbono está ligado a outros três. A figura a seguir representa um *Buckminsterfulereno*, que tem 60 átomos de carbono e rendeu um Prêmio Nobel para Robert Curl, Harold Kroto e Richard Smallem em 1996. Por simplicidade, não representamos as ligações duplas.



Em termos matemáticos, definimos *fulereno* como qualquer poliedro convexo apenas com faces hexagonais e pentagonais, sendo que cada vértice é extremidade de exatamente três arestas.

a) Sejam h e p as quantidades de faces hexagonais e pentagonais, respectivamente, de um fulereno. Calcule a quantidade de arestas e a quantidade de vértices do fulereno em função de h e p.

b) Mostre que todo fulereno tem exatamente 12 faces pentagonais.

Observação: Você pode querer utilizar a *fórmula de Euler*: sendo V, A e F as quantidades de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, $V - A + F = 2$.

PROBLEMA 2

Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ variáveis reais, definimos o *polinômio simétrico* σ_k como a soma de todos os possíveis $\binom{n}{k}$ produtos de k entre as n variáveis. Por exemplo, $\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ é a soma, $\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$ é a soma dos $\binom{n}{2}$ produtos de duas variáveis e $\sigma_n = x_1x_2 \dots x_n$ é o produto das n variáveis. Definimos ainda a soma das k-ésimas potências das n variáveis, $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$.

Existem várias fórmulas que relacionam s_k com os polinômios simétricos. Um exemplo são as *fórmulas de Newton*:

$$\begin{aligned}
&s_2 = \sigma_1 s_1 - 2\sigma_2\\
&s_3 = \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 + 3\sigma_3\\
&s_4 = \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 + \sigma_3 s_1 - 4\sigma_4\\
&\dots\\
&s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \cdots - (-1)^k k\sigma_k
\end{aligned}$$

Note que essas fórmulas nos dão s_k em função de $s_1, s_2, \dots, s_{k-1}$, ou seja, precisamos calcular todos os valores anteriores de s_i, $1 \le i < k$. Mas podemos obter s_k diretamente em função dos polinômios simétricos: por exemplo, para $k = 3$, podemos montar o sistema linear

$$\begin{cases} s_1 = \sigma_1 \\ \sigma_1 s_1 - s_2 = 2\sigma_2 \\ \sigma_2 s_1 - \sigma_1 s_2 + s_3 = 3\sigma_3 \end{cases}$$

e resolvê-lo.

a) Utilizando o sistema acima, encontre s_3 em função de σ_1, σ_2 e σ_3.

b) Utilizando as fórmulas de Newton (você não precisa demonstrá-las!), prove que

$$s_n = \det\begin{pmatrix}
\sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\
2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \dots & 0 & 0\\
3\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
(n-1)\sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \sigma_{n-3} & \dots & \sigma_1 & 1\\
n\sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \dots & \sigma_2 & \sigma_1
\end{pmatrix}$$

Nesse problema, você pode querer utilizar a regra de Cramer: considere o sistema em x, y, z

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + iz = p \end{cases}$$

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, A_x = \begin{bmatrix} m & b & c \\ n & e & f \\ p & h & i \end{bmatrix}, A_y = \begin{bmatrix} a & m & c \\ d & n & f \\ g & p & i \end{bmatrix}, A_z = \begin{bmatrix} a & b & m \\ d & e & n \\ g & h & p \end{bmatrix}$$

Se $\det A \neq 0$, então a solução do sistema é dada por

$$x = \frac{\det A_x}{\det A}, y = \frac{\det A_y}{\det A}, z = \frac{\det A_z}{\det A}.$$

A generalização desse resultado para n variáveis também é válida.

PROBLEMA 3

Uma *variável aleatória*, como o nome sugere, varia aleatoriamente. Associamos a cada valor de uma variável aleatória uma probabilidade, indicando com que frequência ele ocorre. Por exemplo, podemos usar uma variável aleatória X para representar o resultado do lançamento de uma moeda. Sendo X a quantidade de caras obtidas, temos $P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{2}$.

Podemos calcular o *valor esperado* e a *variância* de uma variável aleatória. Sendo S o espaço amostral, ou seja, o conjunto dos valores assumidos por X, o valor esperado $E(X)$ é a média, ponderada pelas probabilidades,

$$E(X)=\sum_{a\in S} a\cdot P(X=a)$$

Quando não há perigo de confusão, representamos $E(X)=\mu$. A variância de X, assim como o nome sugere, mede o quanto X varia em relação ao valor esperado:

$$VAR(X)=\sum_{a\in S}(a-\mu)^2\cdot P(X=a)$$

O valor esperado e a variância têm as seguintes propriedades: sendo X e Y variáveis aleatórias independentes (o valor de uma variável não influencia o valor da outra) e c constante,

- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- $VAR(X+Y)=VAR(X)+VAR(Y)$
- $E(c\cdot X)=c\cdot E(X)$
- $VAR(c\cdot X)=c^2\cdot VAR(X)$

As variáveis aleatórias são úteis para obter algumas estimativas. Em particular, a *desigualdade de Chebyshev* diz que

$$P(|X-\mu|\geq t)\leq\frac{VAR(X)}{t^2}$$

Vamos achar, com o auxílio dessa desigualdade, uma estimativa para $\binom{2m}{m}$.

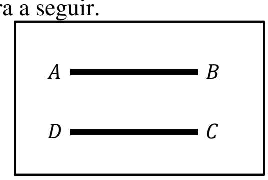
a) Seja $X=X_1+X_2+\cdots+X_{2m}$ a soma de $2m$ variáveis X_i independentes tais que X_i é igual a 0 com probabilidade $\frac{1}{2}$ e 1 com probabilidade $\frac{1}{2}$ (assim como a nossa moeda!). Calcule o valor esperado e a variância de X.

b) Mostre que $P\left(|X-m|<\sqrt{m}\right)\geq\frac{1}{2}$.

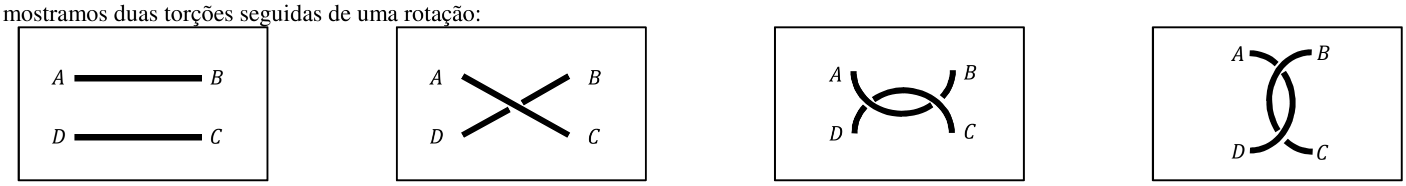
c) Calcule $P(X=m+k)$ e prove que $P\left(|X-m|<\sqrt{m}\right)\leq\left(2\sqrt{m}+1\right)\binom{2m}{m}2^{-2m}$. Conclua que $\binom{2m}{m}\geq\frac{2^{2m}}{4\sqrt{m}+2}$.

PROBLEMA 4

O matemático John H. Conway criou uma maneira de descrever laços em duas cordas usando os números racionais. Imagine quatro pinos em uma mesa, que são rotulados com as letras A, B, C e D, no sentido horário. Inicialmente prendemos as pontas de uma das cordas nos pinos A e B e as pontas da outra corda nos pinos C e D, como mostra a figura a seguir.



Uma *torção* consiste em trocar as pontas das cordas que estão em B e C, passando a corda com ponta que estava no começo em B sobre a corda com ponta que estava em C. Uma *rotação* consiste em girar as pontas em 90° no sentido horário, ou seja, $A\to B\to C\to D\to A$. A seguir, mostramos duas torções seguidas de uma rotação:



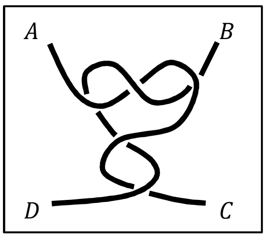
Conway associa a cada laço com duas cordas um número racional. A situação inicial corresponde ao 0. Cada torção soma 1 ao racional e cada rotação transforma o número no oposto de seu inverso (ou seja, $x\to -1/x$). As duas torções e a rotação acima nos levam aos racionais

$$0\xrightarrow{T}1\xrightarrow{T}2\xrightarrow{R}-\frac{1}{2}$$

Algo muito bacana nessa associação é que ela permite mostrar como desatar o laço fazendo as mesmas operações. Por exemplo, desatamos o laço acima com uma torção, uma rotação e mais duas torções:

$$-\frac{1}{2}\xrightarrow{T}\frac{1}{2}\xrightarrow{R}-2\xrightarrow{T}-1\xrightarrow{T}0.$$

a) Que número racional está associado ao laço a seguir?



b) Exiba uma sequência de torções e rotações que permitem construir o laço correspondente a $\frac{3}{7}$.

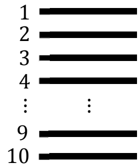
c) Como você desfaz o laço $\frac{3}{7}$ com torções e rotações? Mostre uma sequência de torções e rotações que faça isso.

d) Mostre que é possível representar qualquer número racional com laços.

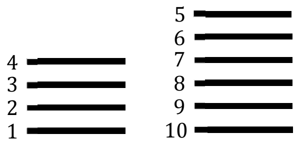
PROBLEMA 5

Um mágico pergunta se alguém na plateia quer aprender a trapacear nas cartas. Após instantes de hesitação, alguns espectadores levantam a mão. Um deles é escolhido e o mágico diz que ele irá aprender um truque que permite vencer qualquer adversário no pôquer. O mágico continua:
-O segredo é aprender a dar boas cartas para seu adversário, mas dar cartas ainda melhores para você mesmo!
Após essas preliminares, o espectador, com o auxílio do mágico, separa algumas cartas de um baralho formando um segundo monte, junta novamente os dois montes em um único e, finalmente, dá as cartas. Para surpresa de todos, observa-se então que o adversário iria receber uma mão ótima: um straight (dez, valete, dama, rei e às – não todos do mesmo naipe); enquanto o espectador receberia uma das melhores mãos do jogo: um straight flush (dez, valete, dama, rei e às – todos de um mesmo naipe).
O mágico encerra o truque dizendo que o espectador deve se comprometer em não usar essa habilidade para ganhar dinheiro!

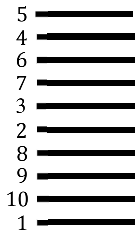
Por trás do truque descrito acima está um dos teoremas da Matemática mais utilizados em manipulação de cartas, o *Princípio de Gilbreath*, difundido durante as décadas de 50, 60 e 70 pelo matemático profissional e mágico praticante Norman Gilbreath.
Primeiramente, vamos definir uma *permutação de Gilbreath*: considere um baralho em que as cartas estão numeradas de 1 a n e que, inicialmente, encontram-se exatamente nessa ordem, ou seja, a i-ésima carta do baralho de cima para baixo é a carta i, como mostra a figura abaixo para $n = 10$.



São retiradas as cartas de 1 a k e formamos um segundo monte com essas cartas, que agora aparecem na ordem inversa. Veja a seguir o caso em que $k = 4$.



Então formamos um único monte embaralhando os dois que temos.



Todas as permutações que podem ser obtidas dessa maneira, com um único corte e uma única embaralhada como descrito acima, são chamadas de *permutações de Gilbreath.* Por exemplo, considerando as figuras acima, (5,4,6,7,3,2,8,9,10,1) é uma permutação de Gilbreath de $\{1, 2, \dots, 10\}$.
a) Determine o número de permutações de Gilbreath de $\{1, 2, \dots, n\}$.
b) Demonstre o *Princípio de Gilbreath*:
Seja $\pi(i)$ o i-ésimo elemento de uma permutação. Para todo j e k, $1 \leq j, k \leq n$, com $jk \leq n$, os j termos consecutivos $\pi\big((k-1)j+1\big)$, $\pi\big((k-1)j+2\big), \dots,\ \pi(kj)$ de uma permutação de Gilbreath são distintos módulo j, isto é, deixam restos distintos na divisão por j. Por exemplo, na permutação (5,4,6,7,3,2,8,9,10,1) os restos na divisão por 3 são (2,1,0,1,0,2,2,0,1,1).