XXXVI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (10 de novembro de 2012)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

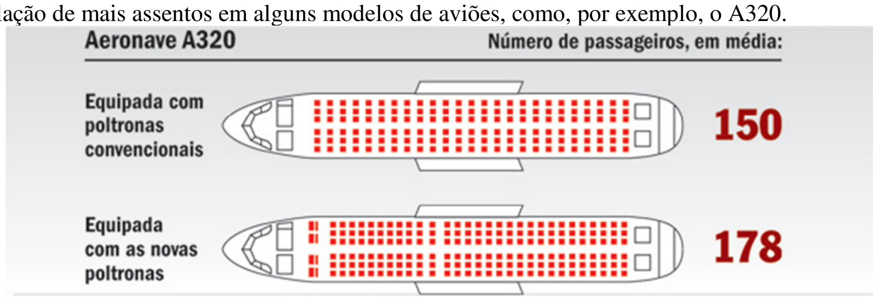
Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

A mais nova medida para ampliar a quantidade de assentos nos aviões é substituir as poltronas convencionais por um modelo menor. As novas poltronas possibilitam instalação de mais assentos em alguns modelos de aviões, como, por exemplo, o A320.



Fonte: http://veja.abril.com.br/noticia/economia/titulo-falso-com-jeitinho-cabe-mais-um

a) Qual é o aumento percentual na capacidade de transporte de passageiros no A320?

b) A companhia Lufthansa já instalou poltronas adicionais em 168 aeronaves Airbus A320, elevando a capacidade de cada um desses aviões para 178 passageiros. Se ela não optasse pela instalação das novas poltronas, quantos aviões com 150 poltronas ela precisaria comprar para obter igual aumento no total de assentos?

c) A companhia Southwest, que tem uma frota de 508 Boeings 737, também está fazendo essa mudança. A companhia, que realiza uma média de 3200 voos por dia, calcula que, com a inclusão de uma nova fileira de poltronas em cada avião, possa lucrar anualmente 200 milhões de dólares a mais. Sabendo que cada fileira de um Boeing 737 tem seis assentos, calcule o lucro médio por passageiro em uma dessas novas poltronas.

PROBLEMA 2

Srinivasa Ramanujan (22 de dezembro de 1887 – 26 de abril de 1920) é um matemático muito famoso pela originalidade de sua obra. Autodidata, devemos a ele algumas das mais impressionantes descobertas da Rainha das Ciências.

Fórmulas como $\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$ impressionam por si só, mas trazem ainda conexões profundas com diversos ramos da Matemática.

Estudaremos nesse problema uma questão que ele propôs no *Journal of Indian Mathematical Society*.

a) Simplifique a expressão $\sqrt{1+(n+1)(n+3)}$ em que n é inteiro positivo.

b) Simplifique a expressão

$$\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}}$$

em que n é um inteiro positivo.

c) Calcule o valor da expressão abaixo, em que aparecem 2011 raízes quadradas:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\cdots+2010\sqrt{1+2011\sqrt{1+(2012)(2014)}}}}}}}$$

PROBLEMA 3

Um movimento bastante praticado em mágicas com cartas de baralho é o “vire duas e corte”. Esse movimento consiste em virar, juntas, as duas cartas do topo da pilha (de modo que cartas viradas para cima fiquem viradas para baixo e vice-versa), colocá-las de volta ao topo, cortar o baralho em qualquer lugar e juntar os dois montes. Por exemplo, vamos executar esse movimento algumas vezes em uma pilha de 10 cartas, numeradas de 1 a 10. As cartas em vermelho estão viradas para cima; as cartas em azul estão viradas para baixo.

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 → 2,1,3,4,5,6,7,8,9,10 → 5,6,7,8,9,10,2,1,3,4
→ 6,5,7,8,9,10,2,1,3,4 → 1,3,4,6,5,7,8,9,10,2
→ 3,1,4,6,5,7,8,9,10,2 → 9,10,2,3,1,4,6,5,7,8

O que esse movimento tem de especial? Ele tem a seguinte propriedade: *para qualquer pilha com $2n$ cartas viradas inicialmente para baixo, a quantidade de cartas viradas para cima em posições pares é igual à quantidade de cartas viradas para cima em posições ímpares.* De fato, no nosso exemplo, temos, após cada um dos três movimentos (“vire duas e corte”), uma carta (a carta 2 na sétima posição, a carta 1 na oitava posição), duas cartas (cartas 1 e 5 em posições ímpares e cartas 2 e 6 nas posições pares) e duas cartas (cartas 2 e 6 nas posições ímpares e cartas 3 e 5 nas posições pares).

a) Explique por que a quantidade de cartas viradas para cima em posições pares continua igual à quantidade de cartas viradas para cima em posições ímpares após um corte. Considere nesse item que só fazemos um corte, ou seja, não viramos as duas cartas do topo.

b) Explique por que a quantidade de cartas viradas para cima em posições pares continua igual à quantidade de cartas viradas para cima em posições ímpares após virar as duas cartas do topo.

Continuando nossa análise, uma aplicação dessa propriedade é o truque *Baby Hummer*: tome quatro cartas, forme uma pilha com todas as cartas viradas para baixo e memorize a última carta (a que está embaixo na pilha). Agora, mexa as cartas de acordo com as seguintes instruções:

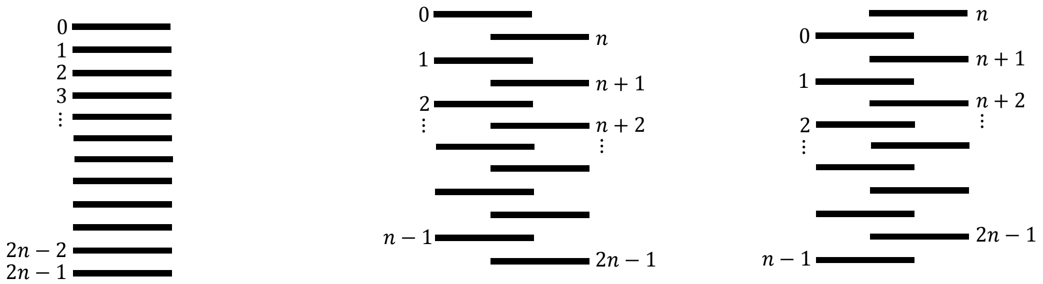
i. Coloque a carta do topo no fim da pilha.
ii. Vire a carta que está agora no topo.
iii. Vire duas cartas e corte. Faça isso quantas vezes quiser.
iv. Vire a carta que está no topo (se está virada para baixo, vire-a para cima; se estiver virada para cima, vire-a para baixo). Em seguida, coloque essa carta no fim da pilha.
v. Coloque a carta que está agora no topo no fim da pilha (não vire a carta!).
vi. Vire a carta que está agora no topo e deixe-a no topo.
vii. Você se lembra da sua carta? Abra a pilha de cartas: três cartas estão viradas para um lado, e a sua carta está virada para o outro lado!

Com um pouco de treino, você nem precisa olhar para as cartas: o truque dá certo sempre!

c) Explique por que o Baby Hummer funciona.

PROBLEMA 4

Todo mágico que deseja fazer belos truques com cartas precisa dominar várias técnicas de embaralhar. Em especial, deve fazer com perfeição o *in-shuffle* e o *out-shuffle*.



Pilha original — Out-shuffle — In-shuffle

A técnica precisa ser completamente dominada para a realização de feitos impressionantes como, após 52 aplicações perfeitas de *in-shuffles*, voltar a ter o baralho em sua configuração original. (Estima-se que menos de cem pessoas no mundo consigam realizar tal façanha; uma delas é o grande matemático Persi Diaconis!)

Neste problema estudaremos os aspectos matemáticos de duas técnicas que usam aplicações sucessivas de *out-shuffles* e *in-shuffles*:

i) Levar a carta que está no topo para uma posição dada p.
ii) Levar a carta que está posição p para o topo.

Os cientistas da computação Sarnath Ramnath e Daniel Scully desenvolveram em 1996 um algoritmo que resolve o problema ii. Mostraremos como ele funciona para $p \neq 2n-1$. Se $p = 2n-1$, realizamos um *in-shuffle* e aplicamos o algoritmo para $p = 2n-2$.

Suponha que tenhamos um *deck* de $2n$ cartas. Numeramos as posições iniciais $0, 1, \ldots, 2n-1$ (isto é, a carta do topo está na posição 0). Para determinar a sequência de *shuffles* que levará a carta na posição p para o topo, inicialmente, consideramos r que satisfaz $2^{r-1} < 2n \leq 2^r$.

Sendo t o maior inteiro menor ou igual a $\frac{2^r(p+1)}{2n}$, escreva t na base binária, $t = t_1 t_2 \ldots t_r$. Considere ainda os últimos r dígitos da representação binária de $2nt$: $s_1 s_2 \ldots s_r$. Formamos, então, a sequência binária $u = u_1 u_2 \ldots u_r$, $u_i = t_i + s_i$, na qual as somas são feitas módulo 2 ($0+0 = 0, 1+0 = 1, 0+1 = 1, 1+1 = 0$). A sequência de shuffles desejada é obtida lendo u da esquerda para a direita e interpretando cada 0 como um *out-shuffle* e cada 1 com um *in-shuffle*. Para exemplificar, vamos aplicar o algoritmo de Ramnath e Scully para, em um baralho de 52 cartas, determinar uma sequência de *shuffles* que leve a carta situada inicialmente na posição $p = 37$ para o topo.

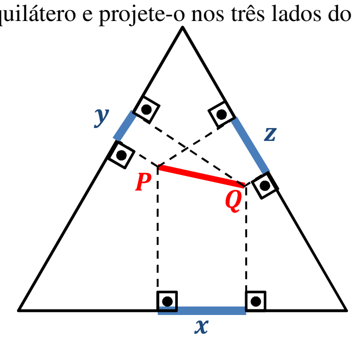
Nesse caso $r = 6$, pois $2^5 < 52 \leq 2^6$. Como $\frac{2^r(p+1)}{2n} = \frac{2^6 \cdot 38}{52} = 46 + \frac{10}{13}$, $t = 46$, cuja representação binária é 101110. Temos ainda que $2nt = 52 \times 46 = 2392$, cuja representação binária é 100101011000, ou seja, $s = 011000$. Logo $u = 110110$ e uma sequência que leva a carta que ocupa inicialmente a posição 37 para o topo é *in, in, out, in, in, out*. De fato, pode-se observar que a última embaralhada é supérflua: *in, in, out, in, in* são suficientes.

a) Apresente uma sequência de shuffles que leve a carta que ocupa a penúltima posição ($p = 50$) de um baralho de 52 cartas para o topo.

b) Como pode ser observado pelo algoritmo descrito acima, a representação da posição p na base binária é uma maneira adequada para observarmos os efeitos de *in-shuffles* e *out-shuffles* sobre a posição de uma carta. Prove que o seguinte algoritmo determina uma sucessão de shuffles que leva a carta do topo para a posição p, ou seja, resolve o problema i:

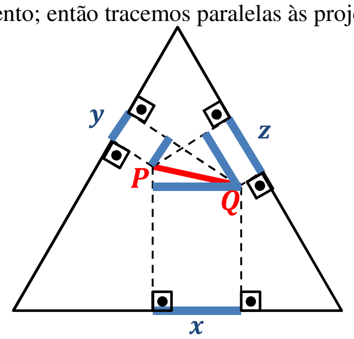
Escrevemos p na base binária. Basta, então, ler o número da esquerda para a direita – interpretando cada 0 como um *out-shuffle* e cada 1 com um *in-shuffle* – e temos uma sequência adequada.

PROBLEMA 5
Considere um segmento no interior de um triângulo equilátero e projete-o nos três lados do triângulo:



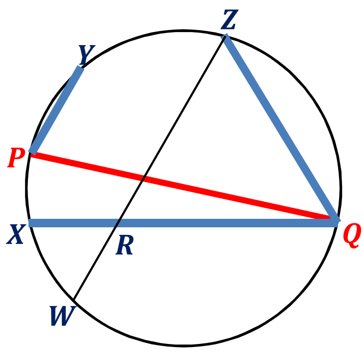
Mostraremos nesse problema que o comprimento da maior projeção é igual à soma das outras duas. Na nossa figura, $x = y + z$.

Vamos lá! Essas projeções estão muito longe do segmento; então tracemos paralelas às projeções:



a) Prove que as paralelas traçadas acima são cordas de uma circunferência com diâmetro PQ.

Continuando nossa análise, vamos ampliar a circunferência citada acima; além disso, traçamos ZW paralelo a PY:



b) Prove que o triângulo XRW é equilátero.
c) Calcule as medidas angulares dos arcos YX, ZY e PW. Não se esqueça de justificar seus cálculos.
d) Prove que $PY = XW$ e conclua o problema, ou seja, prove que $x = y + z$.

Você pode querer utilizar os seguintes fatos:

- *O conjunto de todos os pontos X tais que $A\hat{X}B$ é reto é uma circunferência de diâmetro AB, com exceção dos pontos A e B;*
- *Seja MN um arco de uma circunferência e K um ponto sobre o complementar desse arco. Então o ângulo $M\hat{K}N$ mede metade da medida angular do arco MN. Na figura a seguir, note que ambos os ângulos $M\hat{K}N$ e $M\hat{L}N$ têm como medida metade da medida angular do arco MN e são, portanto, congruentes.*