XXXVI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (10 de novembro de 2012)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Em 1912, o farmacêutico Wilbur Lincoln Scoville desenvolveu a *Escala de Scoville*, um teste usado para medir a ardência de uma pimenta ou de um molho de pimentas. Essa escala baseia-se na concentração de capsaicina, o componente químico que produz a sensação de "calor" quando nós, seres humanos, ingerimos uma pimenta ou um molho de pimentas (nos pássaros, a capsaicina age como analgésico ao invés de causar ardência).

No teste, uma solução do extrato de pimenta é diluída em água até que o "calor" não seja detectável por um grupo de provadores; o grau de diluição dá a sua medida na escala de Scoville.

A pimenta doce, que não contém nenhuma capsaicina, tem um índice de Scoville igual a zero. As pimentas muito quentes, como as *habaneros*, podem ter uma classificação de 300.000 (ou mais) unidades Scoville.

Veja mais alguns exemplos dessa escala.

Pimenta / Molho de Pimenta	*Unidades Scoville*
Capsaicina pura	16.000.000
Halloween 2005	13.500.000
Spray de pimenta usado pela polícia	5.300.000
Naga-Bih Jolokia	1.000.000
Spontaneous Combustion Power	Entre 400.000 e 500.000
Vicious Viper	250.000
You can't Handle this Hot Sauce	225.000
Mustard Gas	125.000
Da' Bomb Beyond Insanity	119.700
Widow – No Survivors	90.000
Pimenta Vermelha da Amazônia	Entre 75.000 e 80.000
Caiena	Entre 30.000 e 50.000
Hot Wax	Entre 5.000 e 10.000
Cholula	3.600
Tabasco	Entre 2.500 e 5.000
Anaheim	Entre 500 e 2.500
Pimenta da Toscana	Entre 100 e 500
Pimenta Doce	0

Fonte: http://www.chilliworld.com/factfile/scoville-scale-of-hot-sauces.asp

a) Ardêncio e Pimêncio adoram pimentas. Ardêncio adora Cholula e sabe que precisa tomar 1 xícara (40 ml) de leite para aliviar o ardor provocado por 1 colher desse molho.

Pimêncio, brincalhão, trocou alguns rótulos dos molhos. Sem saber, Ardêncio ingeriu 1 colher de *Widow – No Survivors* pensando ser Cholula. Que volume de leite ele precisará tomar para aliviar o ardor causado por esse molho?

b) Sabe-se que para a maioria das pessoas, o limite de ingestão de leite de uma só vez é 2 litros. Considerando esse fato, qual é a pimenta ou molho mais quente da tabela que Ardêncio pode ingerir e ter segurança de que vai poder aliviar o ardor tomando leite?

PROBLEMA 2

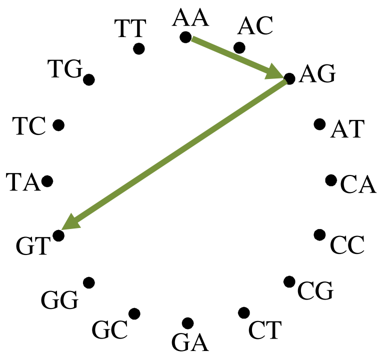
O DNA é feito de uma sequência de quatro *nucleobases* (A, C, T, G) como, por exemplo, TCATCTGTCACGTCGAT. Os padrões nas cadeias de DNA são usados para identificar criminosos, testes de paternidade, estudar doenças e criar curas para elas.

É fácil obter DNA de qualquer parte do corpo humano, como saliva ou cabelo. Sendo as cadeias de DNA longas, é difícil ler a sequência, e cientistas procuram constantemente técnicas para realizar essa tarefa.

Uma das técnicas é baseada na *placa sequenciadora de DNA*. Ela interage com a amostra de DNA e destaca as sequências de tamanho três que aparecem. Por exemplo, considere a placa a seguir, que exibe todas as 64 sequências de três letras, de AAA a TTT. As casas destacadas indicam que as três letras aparecem consecutivamente na amostra:

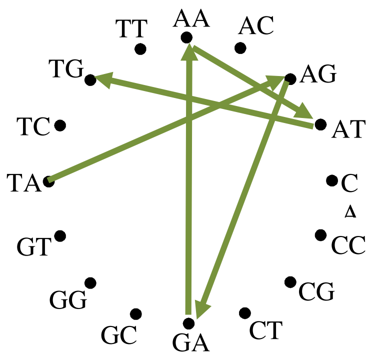
AAA	ACA	AGA	ATA	AAC	ACC	AGC	ATC
AAG	ACG	AGG	**ATG**	AAT	**ACT**	**AGT**	ATT
CAA	**CCA**	CGA	CTA	CAC	CCC	CGC	**CTC**
CAG	CCG	CGG	CTG	CAT	CCT	CGT	CTT
GAA	GCA	GGA	**GTA**	GAC	GCC	**GGC**	GTC
GAG	GCG	GGG	GTG	GAT	GCT	GGT	GTT
TAA	TCA	TGA	TTA	TAC	**TCC**	TGC	TTC
TAG	TCG	**TGG**	TTG	**TAT**	TCT	TGT	TTT

a) Para ajudar a descobrir a sequência, usamos um diagrama chamado *grafo*. Nele marcamos pontos, que representam as 16 sequências de duas letras, e ligamos XY a YZ com uma flecha quando XYZ aparece destacado na placa (X, Y, Z não precisam ser distintos). Por exemplo, como AAG e AGT estão destacadas, fazemos uma flecha ligando AA a AG e outra ligando AG a GT.



Agora é a sua vez! Complete o grafo (tem uma cópia na folha de respostas, complete lá!).

b) As flechas determinam um caminho formado por flechas consecutivas. Por exemplo, no grafo



as flechas formam o caminho TA-AG-GA-AA-AT-TG, e a sequência de DNA é TAGAATG.

Determine a sequência de DNA descrita na placa.

PROBLEMA 3

O matemágico Grande Ronaldini faz um de seus melhores truques: ele coloca na mesa uma pilha de moedas e chama quatro voluntários: Aino, Bino, Cino e Dino. Ele vira as costas para a pilha de moedas e diz: "Aino, por favor, pegue uma das moedas; Bino, pegue outra moeda, mas de valor diferente da de Aino; Cino, é a sua vez: pegue uma moeda, de valor diferente da de Aino e de Bino; Dino, espero que tenha prestado atenção, pois você tem que pegar uma moeda de valor diferente das moedas que seus amigos pegaram."

Ainda sem ver o que está acontecendo, o Grande Ronaldini continua seu truque: "Dino, você foi o último a pegar a moeda, então você teve menos escolhas. Seja qual for o valor que você pegou, eu quero que você pegue agora o quádruplo desse valor; por exemplo, se você pegou 10 centavos, agora pegue mais 40 centavos. Se quiser pode usar sua moeda como troco. Aino, você foi primeiro, e deve ter sido ganancioso; pegue agora o mesmo valor que você tinha pegado antes. Bino, por favor pegue o dobro do que você tinha pegado antes; Cino, você escolheu mais tarde, então pegue o triplo do que você tinha pegado antes; se você tinha pegado 5 centavos, pegue agora mais 15 centavos."

"Não deixem eu ver suas moedas", Ronaldini diz enquanto se vira para a pilha das moedas que sobraram. Nesse momento, ele diz suas palavras mágicas e revela qual moeda cada um dos voluntários pegou no início do truque.

Ao contrário dos outros mágicos, o Grande Ronaldini releva seus truques: no início, ele coloca na mesa exatamente R$1,96: 6 moedas de R$0,01, 6 moedas de R$0,05, 6 moedas de R$0,10 e 4 moedas de R$0,25. No final, digamos que sobraram T centavos. Ronaldini faz os seguintes cálculos:

- Calcula o resto da divisão de T por 5. O resultado é 1, 2, 3 ou 4, e ele indica quem pegou a moeda de R$0,01: 1 corresponde a Dino, 2 a Cino, 3 a Bino e 4 a Aino.
- Calcula o resto r da divisão de T por 4, indicando quem pegou a moeda de R$0,10. Os restos 1, 2, 3 e 0 indicam Dino, Cino, Bino e Aino, respectivamente.
- Soma $3r$ (r foi calculado no passo anterior) ao quociente da divisão de T por 5. O resto da divisão dessa conta por 5 diz quem pegou a moeda de R$0,05: 1 corresponde a Dino, 2 a Cino, 3 a Bino e 4 a Aino.
- A pessoa que sobrou pegou a moeda de R$0,25.

Por exemplo, suponha que sobraram 77 centavos na pilha. Executemos os passos com $T = 77$:

- 77 dividido por 5 deixa resto 2, então Cino pegou a moeda de R$0,01.
- 77 dividido por 4 deixa resto $\mathrm{r} = 1$, então Dino pegou a moeda de R$0,10.
- Temos $3\mathrm{r} = 3$ e que o quociente da divisão de 77 por 5 é 15. O resto da divisão da soma, $3 + 15 = 18$, por 5, é 3, e Bino pegou a moeda de R$0,05.
- A pessoa que sobrou, Aino, pegou a moeda de R$0,25.

a) Suponha agora que sobraram 66 centavos na pilha. Usando o procedimento acima, diga quem pegou qual moeda.

b) Sejam u, c, d, v as quantidades de moedas de R$0,01, R$0,05, R$0,10 e R$0,25 que o Grande Ronaldini pede para os voluntários retirarem na segunda parte da mágica (de modo que u, c, d, v são os números 1,2,3,4 em alguma ordem). Determine, em termos de u, c, d, v, quantos centavos sobram na pilha.

c) Explique por que o primeiro passo do procedimento funciona, ou seja, mostre por que o resto da divisão de T por 5 indica, da maneira apresentada, quem pegou a moeda de R$0,01.

PROBLEMA 4

O *Sudoku* é um dos jogos de raciocínio mais populares atualmente. Ele consiste em completar um quadrado 9×9 de modo que cada linha, coluna e quadrado 3×3 contenha os algarismos de 1 a 9 exatamente uma vez.

Muitas questões de Matemática podem ser feitas envolvendo o Sudoku, mas a grande maioria das resoluções envolve o uso de computadores para estudar casos (que geralmente são muitos). Mas é possível criar questões menos trabalhosas com versões menores do Sudoku, como o *Shidoku*, que é jogado em quadrados 4×4 com os algarismos de 1 a 4 (*Shi* é "quatro" em japonês, por isso o nome *Shidoku*). As regras são semelhantes: em cada linha, coluna e quadrado 2×2 devem aparecer os números de 1 a 4 exatamente uma vez. Veja alguns Shidokus preenchidos:

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

Pode-se provar que só existem dois tipos de Shidokus essencialmente diferentes: os dois exemplos acima. Chamaremos o da esquerda de *Tipo I* e o da direita de *Tipo II*.

a) Preencha o Shidoku que está na folha de respostas.

Continuando nossa discussão: no item a, vimos um exemplo em que quatro dicas (números dados) são suficientes para preencher um Shidoku, de modo que haja só uma solução. Provaremos, a partir da figura a seguir, que se tivermos apenas três dicas haverá mais de uma solução.

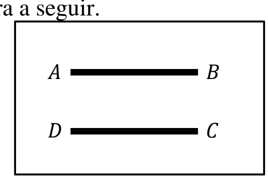
b) Quantas soluções tem o Shidoku com 12 dicas a seguir?

	2		4
	4		2
2	1	4	3
4	3	2	1

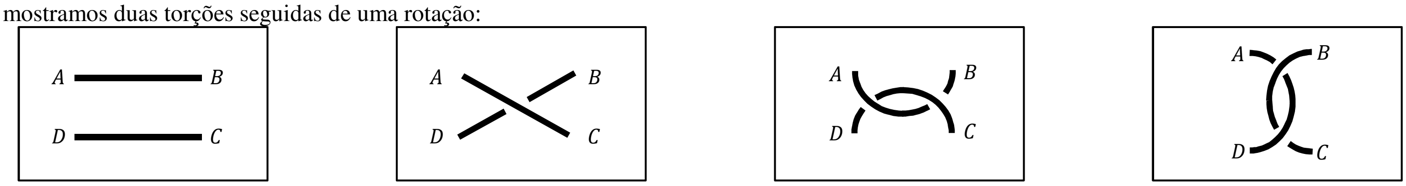
c) Explique por que Shidokus do Tipo I e do Tipo II com três dicas ou menos têm mais de uma solução.

PROBLEMA 5

O matemático John H. Conway criou uma maneira de descrever laços em duas cordas usando os números racionais. Imagine quatro pinos em uma mesa, que são rotulados com as letras A, B, C e D, no sentido horário. Inicialmente prendemos as pontas de uma das cordas nos pinos A e B e as pontas da outra corda nos pinos C e D, como mostra a figura a seguir.



Uma *torção* consiste em trocar as pontas das cordas que estão em B e C, passando a corda com ponta que estava no começo em B sobre a corda com ponta que estava em C. Uma *rotação* consiste em girar as pontas em $90°$ no sentido horário, ou seja, $A \to B \to C \to D \to A$. A seguir, mostramos duas torções seguidas de uma rotação:



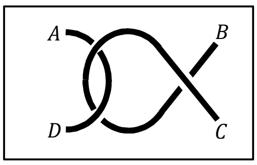
Conway associa a cada laço com duas cordas um número racional. A situação inicial corresponde ao 0. Cada torção soma 1 ao racional e cada rotação transforma o número no oposto de seu inverso (ou seja, $x \to -1/x$). As duas torções e a rotação acima nos levam aos racionais

$$0 \xrightarrow{T} 1 \xrightarrow{T} 2 \xrightarrow{R} -\frac{1}{2}$$

Algo muito bacana nessa associação é que ela permite mostrar como desatar o laço fazendo as mesmas operações. Por exemplo, desatamos o laço acima com uma torção, uma rotação e mais duas torções:

$$-\frac{1}{2} \xrightarrow{T} \frac{1}{2} \xrightarrow{R} -2 \xrightarrow{T} -1 \xrightarrow{T} 0.$$

a) Que número racional está associado ao laço a seguir?



b) Exiba uma sequência de torções e rotações que permitem construir o laço correspondente a $\frac{3}{4}$.

c) Como você desfaz o laço $\frac{3}{4}$ com torções e rotações? Mostre uma sequência de torções e rotações que faça isso.

d) Mostre que é possível desfazer qualquer laço feito com torções e rotações. Não se esqueça de justificar sua resposta.