XXXV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (5 de novembro de 2011)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

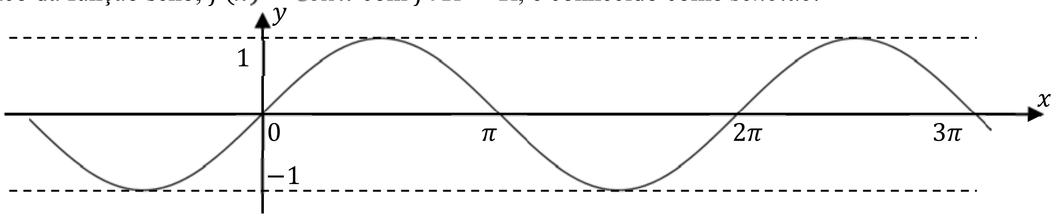
www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

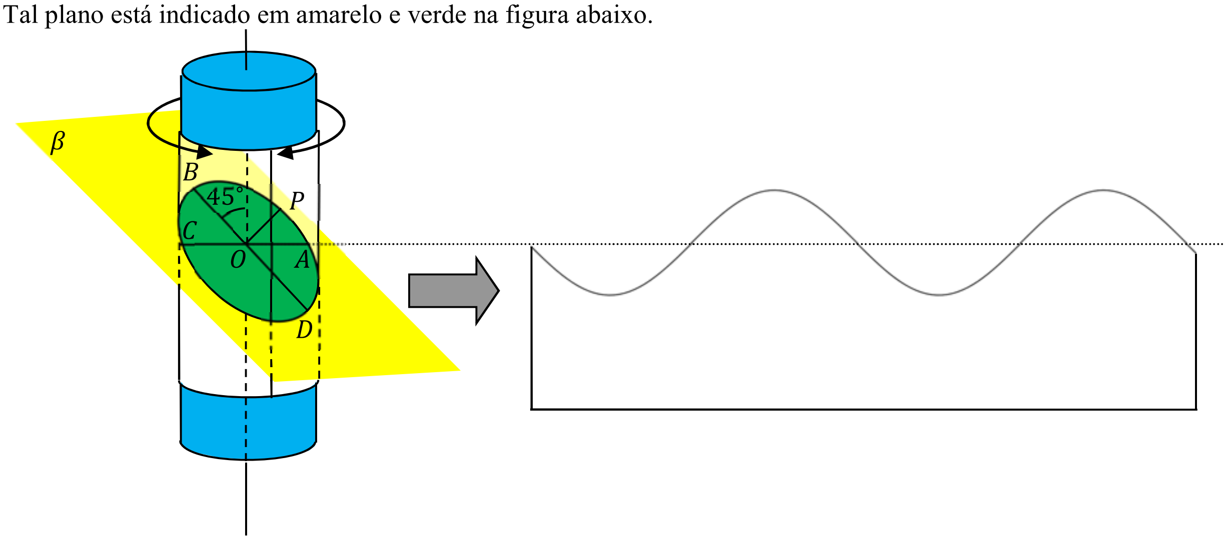
Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

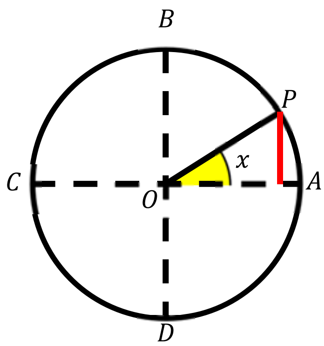
O formato do gráfico da função seno, $f(x) = \text{sen}\, x$ com $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é conhecido como *senoide*.



Você pode obter uma senoide cortando um cilindro revestido de papel com um plano β que forma 45° com seu eixo e desenrolando o papel. Tal plano está indicado em amarelo e verde na figura abaixo.



Suponha que o raio do cilindro é 1. A figura a seguir mostra a vista superior do cilindro:



a) Seja α o plano perpendicular ao eixo do cilindro e que passa pelo centro da secção do plano no cilindro. Complete o desenho que aparece na Folha de Respostas da vista lateral do cilindro (ou seja, no plano perpendicular a AC que contém BD). No seu desenho, devem aparecer, além da projeção do plano α (que já desenhamos para vocês), as projeções de A, B, C, D, P e da secção do plano β no cilindro.

b) Mostre que a distância do ponto P ao plano α é $\text{sen}\, x$, sendo que se $\text{sen}\, x < 0$, então o ponto está abaixo de α. Ou seja, mostre que ao desenrolarmos o papel cortado do cilindro obteremos uma senoide.

PROBLEMA 2

Quando trabalhamos com matrizes, muitas vezes vale a pena cometer um pequeno “abuso de linguagem” e considerar, por exemplo, que uma matriz $2n \times 2n$ é formada por quatro matrizes $n \times n$. Assim, o produto de duas matrizes $2n \times 2n$ pode ser dado por

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{bmatrix}$$

em que A, B, C, D, E, F, G e H são matrizes $n \times n$. Observe que as operações indicadas são entre matrizes (lembre que a multiplicação de matrizes não é comutativa!).

a) Seja $\mathbf{0}$ a matriz nula de ordem n (isto é, $n \times n$). É verdade que $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AD - BC & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & AD - BC \end{bmatrix}$?
Caso seja verdade, demonstre a identidade; caso contrário, apresente um contraexemplo.

b) Determine a inversa da matriz $M = \begin{bmatrix} I & A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{bmatrix}$, na qual A e B são matrizes $n \times n$, $\mathbf{0}$ é a matriz nula de ordem n e I é a matriz identidade de ordem n. Ou seja, determine, em função de A e B, a matriz M^{-1} tal que $MM^{-1} = M^{-1}M = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{bmatrix}$.

c) Determine a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Dica: Nesse item, talvez você deseje utilizar a fórmula obtida em b. Acerte-o!

PROBLEMA 3

Veja só que moleza: apresentaremos o enunciado e a resolução de um desafio do excelente problemista Peter Winkler:

> N formigas estão distribuídas ao longo de uma haste horizontal de 1 metro de comprimento. Cada formiga começa a caminhar para Leste ou Oeste com uma velocidade de 1 cm/s. Quando duas formigas se “chocam”, elas trocam o sentido de sua caminhada, porém sem alterar o módulo da velocidade. Qual é o tempo máximo necessário para todas as formigas saírem da haste?
>
> *Resolução*: Imagine que cada formiga carrega uma bandeira (!?!). Quando duas formigas se encontram, além de mudarem o sentido de sua caminhada, elas trocam as suas bandeiras. Assim, em todos os instantes cada formiga está carregando *alguma* bandeira e o sentido da velocidade das bandeiras nunca muda. Logo se, no início, havia uma formiga em uma das extremidades que caminhava em direção a outra, a bandeira que ela segurava inicialmente demorará 100 segundos para percorrer toda a extensão da haste. Esse é, portanto, o tempo máximo necessário para todas as formigas saírem da haste.

Claro que essa apresentação tem (boas) segundas intenções. Vocês irão resolver agora outro problema de Peter Winkler!

> N formigas estão distribuídas ao longo de uma haste *circular* de 1 metro de comprimento. Cada formiga começa a caminhar no sentido horário ou anti-horário com uma velocidade de 1 cm/s. O sentido da caminhada de cada formiga é escolhido aleatoriamente com igual probabilidade. Quando duas formigas se “chocam”, elas trocam o sentido de sua caminhada, porém sem alterar o módulo da velocidade. (Tudo muito parecido até agora, né? Mas não dá para as formigas saírem de uma haste circular!)
>
> *Resolução*: Agora é a sua vez!

a) Considere uma formiga em particular que chamaremos *Alice*. Mostre que, após 100 segundos, se ela estiver em sua posição inicial, então todas as formigas estarão em suas posições iniciais.
b) Qual é, em função de N, a probabilidade de, após 100 segundos, Alice estar exatamente em sua posição inicial?

PROBLEMA 4

Denominamos “potência perfeita” todo número que pode ser escrito na forma a^b em que a e b são inteiros positivos, $a \geq 2$ e $b \geq 2$.
a) Determine o número de potências de 2 (isto é, números da forma 2^n com n inteiro positivo) menores ou iguais a 10^{100}. Você pode desejar utilizar que $\log_2 10 \cong 3{,}322$.
b) Justifique a afirmação a seguir:

“O número de potências perfeitas entre 1 e n é menor do que $\sqrt{n} \cdot \log_2 n$.”

c) Sendo $PF(n)$ o número de potências perfeitas entre 1 e n, demonstre que existe N tal que $\frac{PF(N)}{N}$ é menor do que 10^{-100}. (Assim estamos mostrando que, em certo sentido, as potências perfeitas são “raras”. Sinta-se mais feliz na próxima vez em que encontrar um 4!)
d) É possível que uma progressão aritmética crescente infinita seja composta apenas por potências perfeitas?
Lembre-se de que uma PA crescente infinita é uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ cujo termo geral é $a_n = a_1 + (n-1)r$, em que r é a razão da PA, $r > 0$.

PROBLEMA 5

O grande matemático John Horton Conway (já presente em outras OPMs) criou uma linguagem de programação baseada em sequências de números racionais positivos, a FRACTRAN. Vamos conhecê-la.

Seja $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ uma sequência de números racionais positivos. No k-ésimo passo da execução do nosso programa FRACTRAN a *entrada* é um inteiro positivo N_k que deve multiplicado pelo primeiro f_i tal que $N_k f_i$ é um número inteiro. Tal produto $N_k f_i$ é a entrada do próximo passo, ou seja, $N_{k+1} = N_k f_i$.

Para o primeiro passo sempre se toma uma potência de 2, isto é, $N_1 = 2^n$, para n inteiro positivo. O programa termina quando obtemos novamente uma potência de 2. Dizemos que tal potência de 2 é a *saída* de nosso programa. Complicado? Um exemplo deve ajudar.

Considere a sequência $A = (f_1;\ f_2;\ f_3;\ f_4;\ f_5; f_6) = \left(\frac{52}{33}; \frac{44}{39}; \frac{1}{11}; \frac{1}{13}; \frac{3}{2}; 11\right)$. Para a entrada 2^3, os passos são:

$$N_1 = 2^3$$
$$N_2 = N_1 f_5 = 2^3 \cdot \frac{3}{2} = 3 \cdot 2^2$$
$$N_3 = N_2 f_5 = 3 \cdot 2^2 \cdot \frac{3}{2} = 3^2 \cdot 2$$
$$N_4 = N_3 f_5 = 3^2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = 3^3$$
$$N_5 = N_4 f_6 = 3^3 \cdot 11$$
$$N_6 = N_5 f_1 = 3^3 \cdot 11 \cdot \frac{52}{33} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$$
$$N_7 = N_6 f_2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot \frac{44}{39} = 2^4 \cdot 3 \cdot 11$$
$$N_8 = N_7 f_1 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot \frac{52}{33} = 2^6 \cdot 13$$
$$N_9 = N_8 f_4 = 2^6 \cdot 13 \cdot \frac{1}{13} = 2^6$$

A saída é, portanto, 2^6. Para facilitar o entendimento do processo, os passos foram escritos explicitando-se as fatorações em primos das entradas. Pode-se provar que, para a sequência A, se a entrada é 2^n, a saída é 2^{2n}.

Suponha que uma dada sequência S de racionais positivos fornece para as entradas $2^n, n$ inteiro positivo, saídas $2^{f(n)}$. Dizemos que a sequência S *computa* a função $f(n)$. A intenção dessa questão é ensinar as ideias básicas da programação em FRACTRAN. Você irá aprender a construir uma sequência que computa a função $f(n)$ que você desejar. (Assim esperamos!)

Primeiro escrevemos um programa, em uma linguagem que denominaremos pré-FRACTRAN, no qual cada linha tem a seguinte forma:

$$linha\ n\colon \frac{p_1}{q_1} \to n_1; \frac{p_2}{q_2} \to n_2; \dots; \frac{p_k}{q_k} \to n_k$$

Sendo que a ação a ser realizada na linha n é trocar o inteiro N por $\frac{p_i}{q_i}N$ para o primeiro i $(1 \le i \le k)$ para o qual tal resultado é inteiro e ir para a linha n_i. Como no FRACTRAN, a entrada é uma potência de 2 e o programa termina quando obtemos uma nova potência de 2. Por exemplo, considere o programa P1 a seguir:

$$linha\ 0\colon \frac{3}{2} \to 0; 1 \to 1$$
$$linha\ 1\colon \frac{2^2}{3} \to 1$$

Para a entrada 2^3, o programa P1 executa os seguintes passos:

$$2^3 \xrightarrow{linha\ 0} 2^2 \cdot 3 \xrightarrow{linha\ 0} 2 \cdot 3^2 \xrightarrow{linha\ 0} 3^3 \xrightarrow{linha\ 0} 3^3 \xrightarrow{linha\ 1} 2^2 \cdot 3^2 \xrightarrow{linha\ 1} 2^4 \cdot 3 \xrightarrow{linha\ 1} 2^6$$

(já viu esses passos hoje?) e termina.

Para chegarmos às frações propriamente ditas, excetuando-se a linha 0, tiramos as referências de uma linha à ela mesma. Por exemplo, a partir de P1 obtemos um novo programa P2:

$$linha\ 0\colon \frac{3}{2} \to 0; 1 \to 1$$
$$linha\ 1\colon \frac{2^2}{3} \to 2$$
$$linha\ 2\colon \frac{2^2}{3} \to 1$$

Agora falta pouco. Atribuímos a cada linha, exceto a 0, um número primo grande (maior do que qualquer um que tenha aparecido no numerador ou denominador de uma fração utilizada no programa pré-FRACTRAN original) e, então, a linha

$$P\colon \frac{a}{b} \to Q; \frac{c}{d} \to R; \frac{e}{f} \to S; \dots$$

em que P, Q, R e S são os tais primos grandes, corresponde às frações:

$$\frac{aQ}{bP}; \frac{cR}{dP}; \frac{eS}{fP}$$

nessa ordem. Assim, a nossa sequência $A = \left(\frac{52}{33}; \frac{44}{39}; \frac{1}{11}; \frac{1}{13}; \frac{3}{2}; 11\right)$ foi construída a partir do programa P1, utilizando as ideias mostradas (e algumas outras, que você terá de descobrir!).

a) Escreva um programa pré-FRACTRAN, nos moldes de P1, que dada a entrada 2^n tenha como saída 2^{n^2}.

b) Faça um programa em FRACTRAN que computa a função $f(n) = n^2$, ou seja, apresente uma sequência de racionais positivos F adequada.