XXXV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (5 de novembro de 2011)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Aino e Eino, exímios pizzaiolos residentes em Rovaniemi (terra do Papai Noel e capital da Lapônia, Finlândia), vieram para São Paulo, mais precisamente para a Cidade Universitária da USP.

Para se deslocarem até a USP, eles primeiramente foram de trem de Rovaniemi até Helsinki. A viagem é de 829 km e eles gastaram 75 euros cada um.

De Helsinki eles seguiram de avião até São Paulo, gastando 825 dólares cada um para percorrer o trajeto de 11299 km.

Do aeroporto internacional de São Paulo eles foram para a USP de táxi, e gastaram juntos 90 reais, percorrendo 43 km.

a) Desprezando as distâncias percorridas a pé, quantos quilômetros eles percorreram do momento em que saíram de Rovaniemi até quando chegaram na USP? (Seja grato aos esforços do Papai Noel para chegar à sua casa, no caso de você ter se comportado bem!)

b) Considerando que 1 euro vale 2,40 reais e que 1 dólar vale 1,72 real, quantos reais eles gastaram no total com transporte para ir de Rovaniemi até a USP?

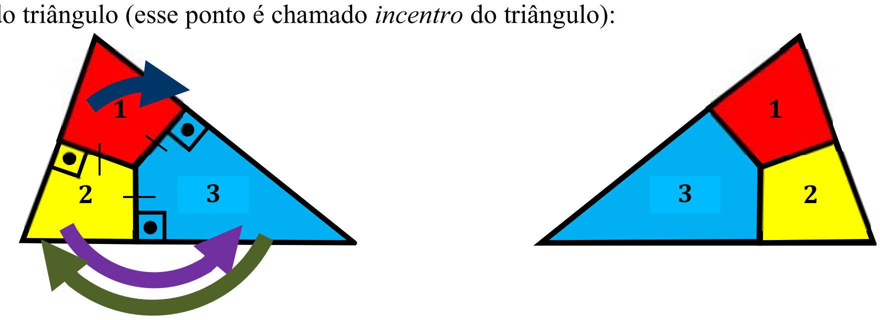
c) Agora é hora de Aino e Eino trabalharem. Eles vão preparar 568 pizzas tipicamente finlandesas, uma para cada um dos 568 participantes da fase final da OPM na USP. O custo com o preparo da pizza é 11,21 reais. Admitindo que para voltar para casa eles vão gastar com transporte o mesmo que gastaram para vir e supondo que todas as pizzas serão vendidas, qual é o preço mínimo da pizza para eles pagarem as duas viagens de ida, as duas viagens de volta e o custo de preparo?

PROBLEMA 2

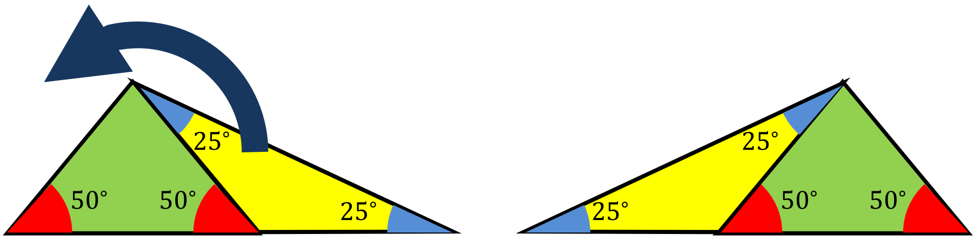
Aino e Eino, os primos finlandeses de Arnaldo e Bernaldo, abriram um restaurante especializado em *jauhelihapizza*, uma pizza de carne moída finlandesa. Aino e Eino fazem pizzas triangulares.

As pizzas são feitas por Aino e entregues em caixas feitas por Eino sob medida e que as acondicionam perfeitamente. Todavia, Eino às vezes erra, fazendo uma caixa que é congruente à pizza mas está invertida (ou seja, é uma versão espelhada da pizza):

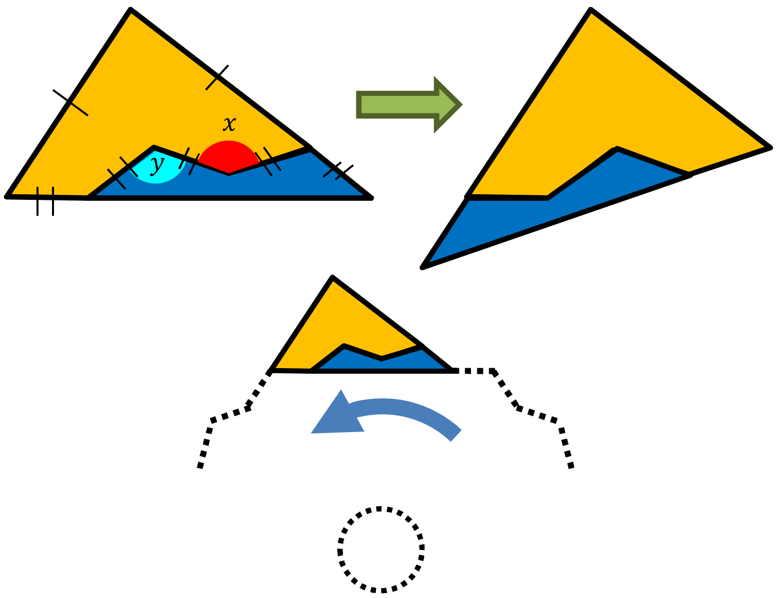
Aino desenvolveu uma técnica para colocar a pizza na caixa sem virá-la de cabeça para baixo (afinal, não podemos arruinar a deliciosa cobertura de carne moída!). Ele corta a pizza em três pedaços, fazendo cortes a partir de um ponto que está à mesma distância dos três lados do triângulo (esse ponto é chamado *incentro* do triângulo):



Porém um dos clientes de Aino e Eino, o professor Piraldo, faz pedidos um pouco mais excêntricos. Ele pede que as pizzas venham em no máximo dois pedaços e especifica também os ângulos internos da pizza. Ele pediu, dessa vez, três pizzas: uma com ângulos internos de 25°, 50° e 105°; uma com ângulos internos 30°, 60° e 90°; e uma com ângulos internos de 30°, 45° e 105°.
Infelizmente, Eino fez as caixas invertidas novamente (que azar!). Aino conseguiu cortar a primeira pizza em dois pedaços e encaixá-los:



Agora é a sua vez!
a) Mostre como Aino deve cortar a pizza com ângulos internos 30°, 60° e 90° em dois pedaços para colocá-los na caixa. Faça como na figura acima, marcando os ângulos nos pedaços de pizza e como girá-los.
b) A terceira pizza deu mais trabalho do que Aino esperava! Mas Aino conseguiu: fez um corte que lembra um pedaço de uma engrenagem. Determine os ângulos x e y marcados na figura.



PROBLEMA 3
Sempre que vamos ao banco ou à praia ou a um restaurante, é comum termos a impressão de que o lugar está lotado o tempo todo, mesmo que isso não seja verdade. Exploraremos tal fenômeno neste problema.
Uma escola tem N salas. Seja X_i o número de alunos na sala i, $1 \leq i \leq N$. Então o número médio $\bar{X}$ de alunos em uma sala selecionada ao acaso ("média de alunos por sala") é dado por

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N}$$

O *número esperado* X^* de alunos na sala frequentada por um aluno selecionado ao acaso é

$$X^* = p_1 \cdot X_1 + p_2 \cdot X_2 + \cdots + p_N \cdot X_N$$

em que p_i é a probabilidade de escolhermos um aluno que está na sala i, $1 \leq i \leq N$. Podemos dizer que o número esperado X^* mede a sensação que os alunos têm de o quanto a sala está cheia.
Sendo, então, $X_1 + X_2 + \cdots + X_N = M$, temos $p_i = \frac{X_i}{M}$ e

$$X^* = \frac{(X_1)^2 + (X_2)^2 + \cdots + (X_N)^2}{M}$$

Também podemos expressar a média de modo mais simples: $\overline{X} = \frac{M}{N}$.
Por exemplo, se temos $N = 3$ salas, com $X_1 = 24$, $X_2 = 6$ e $X_3 = 6$ alunos,

$$M = 24 + 6 + 6 = 36$$

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} = \frac{M}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

$$X^* = \frac{(X_1)^2 + (X_2)^2 + (X_3)^2}{M} = \frac{24^2 + 6^2 + 6^2}{36} = 18$$

a) Suponha que em uma escola haja seis salas: uma sala com 50 alunos e outras cinco salas com k alunos. Sendo $X^* = 42$, determine os possíveis valores de k e calcule $\bar{X}$ para cada um deles.
b) Encontre valores inteiros positivos para N e $X_1, X_2, \ldots, X_N$ de modo que $X^* \geq 10\bar{X}$. **Atenção**: Existem infinitos conjuntos de valores com tal propriedade; você só precisa exibir um.

PROBLEMA 4

No Egito Antigo, as frações eram expressas principalmente como somas de frações distintas com numerador igual a 1. Por isso, frações com numerador igual a 1 são chamadas *frações egípcias*. Por exemplo, eles utilizavam $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ no lugar de $\frac{8}{15}$ (mais precisamente, eles escreviam hieróglifos que representam $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$).

Os matemáticos questionaram se era possível representar todo número racional $\frac{p}{q}$, com $1 \leq p < q$, como soma de frações egípcias distintas. A resposta é sim, e foi encontrada por Fibonacci (o mesmo da sequência!).

Para isso, pode-se utilizar o *algoritmo guloso*, que funciona da seguinte forma: subtraímos da fração $\frac{p}{q}$ a maior fração $\frac{1}{n}$ que é menor do que $\frac{p}{q}$ e depois continuamos o processo com a fração que sobrar. Por exemplo:

$$\frac{4}{17}=\frac{1}{5}+\left(\frac{4}{17}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}+\frac{3}{85}=\frac{1}{5}+\frac{1}{29}+\frac{2}{2465}=\frac{1}{5}+\frac{1}{29}+\frac{1}{1233}+\frac{1}{3039345}$$

a) Escreva $\frac{15}{19}$ como soma de frações egípcias distintas.

b) A cada passo do algoritmo guloso, determinamos a maior fração egípcia menor do que uma fração (não egípcia) $\frac{p}{q}$. Como $\frac{p}{q}=\frac{1}{\frac{q}{p}}$, devemos tomar como denominador o menor inteiro maior ou igual a $\frac{q}{p}$. Por exemplo, $\frac{4}{17}=\frac{1}{\frac{17}{4}}=\frac{1}{4{,}25}$ e devemos tomar 5 como denominador.

Considerando a função *teto de* x, denotada $\lceil x \rceil$, tal que $\lceil x \rceil = \textit{menor inteiro maior ou igual a } x$, a cada passo do algoritmo guloso tomamos a fração egípcia $\frac{1}{\left\lceil \frac{q}{p} \right\rceil}$. Note que, no exemplo inicial, $\left\lceil \frac{17}{4} \right\rceil = \lceil 4{,}25 \rceil = 5$.

Sendo $q = pl + r$, $0 < r < p$, em que l é o quociente e r é o resto da divisão euclidiana de q e p, calcule $\left\lceil \frac{q}{p} \right\rceil$ em função de l.

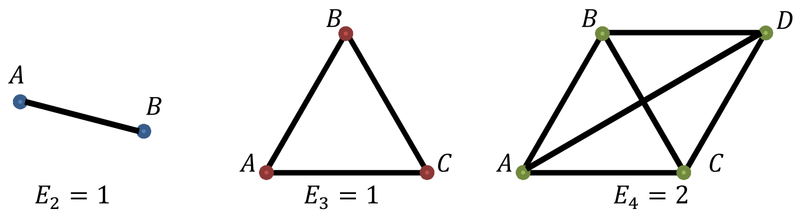
c) Mostre que, a cada passo do algoritmo guloso, o numerador da fração que sobra diminui e conclua que toda fração $\frac{p}{q}$ é a soma de, no máximo, p frações egípcias distintas.

PROBLEMA 5

Neste problema estudaremos um problema proposto por um dos maiores matemáticos do Século XX, Paul Erdös:

Qual é o número mínimo E_n de distâncias distintas determinadas por um conjunto de n pontos no plano?

Para $n = 2$ temos dois pontos, A e B, e uma única distância a considerar: AB. Logo $E_2 = 1$. Para $n = 3$, temos três pontos, A, B e C; o número mínimo de distâncias é atingido quando eles são os vértices de um triângulo equilátero ΔABC. Novamente temos apenas uma distância, ou seja, $E_3 = 1$. Para $n = 4$, temos quatro pontos, A, B, C e D. Considere dois triângulos equiláteros ΔABC e ΔBCD. Temos duas distâncias ($AB = AC = BC = BD = CD \neq AD$). Assim, $E_4 = 2$.

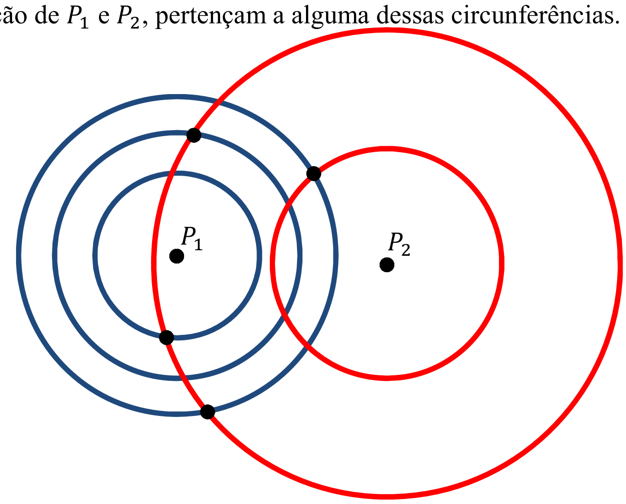


a) Para $n = 5$, o valor mínimo E_5 é obtido quando consideramos os vértices de um pentágono regular. Quanto é E_5?

b) Uma fórmula para tal número de distâncias tem-se mostrado fora de cogitação. Assim, provaremos que, para $n \geq 2$, $E_n \geq \sqrt{\frac{n-2}{2}}$.

Essa não é uma estimativa muito boa (observe o caso $n = 4$), mas dá uma ideia dos métodos utilizados para obter resultados mais próximos dos valores reais.

Seja S um conjunto de n pontos no plano, $n \geq 3$. Tome $P_1, P_2 \in S$. Desenhe circunferências concêntricas com centro em P_1 de modo que todos os pontos de S, com exceção de P_1 e P_2, pertençam a alguma dessas circunferências. Faça o mesmo para P_2.



Sejam s e t, respectivamente, o número de circunferências desenhadas com centros P_1 e P_2. Determine o número máximo de intersecções entre tais circunferências. Considere todas as intersecções, não apenas as que determinam pontos de S.

c) A partir do item anterior, mostre que $2st \geq n - 2$ e conclua que $E_n \geq \sqrt{\frac{n-2}{2}}$ para $n \geq 2$.