XXXIV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (6 de novembro de 2010)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Os celulares com tecnologia CDMA utilizam como princípio de funcionamento os *Códigos de Walsh*, que permitem que vários celulares utilizem a mesma banda de frequências ao mesmo tempo, sem interferências.

Por exemplo, para uma estação base se comunicar com dois celulares, digamos A e B, ela envia um bit de cada vez o qual pode ser interpretado por ambos, mas será válido para apenas um deles. Cada celular possui um *código* que é uma 2^k-upla cujos elementos são todos iguais a –1 ou 1. Cada bit de informação também é transmitido via uma 2^k-upla, chamada *vetor de informação*. No nosso caso, sejam (1,1) o código de A e (1, –1) o código de B. É então realizado o *produto escalar*, $(x,y)\otimes(w,z)=xw+yz$, entre o seu código e o vetor de informação que chegar. Assim, quando A recebe o vetor (a, b), onde a e b podem ser –1 ou 1, ele realiza a seguinte operação, cujo resultado será o bit recebido: $\frac{(1,1)\otimes(a,b)}{2}=\frac{1\cdot a+1\cdot b}{2}$. Se $(a,b)=(1,1)$, o bit lido por A é $\frac{(1,1)\otimes(1,1)}{2}=\frac{1\cdot 1+1\cdot 1}{2}=1$ e B lê $\frac{(1,-1)\otimes(1,1)}{2}=\frac{1\cdot 1+(-1)\cdot 1}{2}=0$, o que não é um bit válido, isto é, esse bit deve ser apenas considerado pelo celular A. Evita-se dessa forma que ocorra interferência.

Outra característica importante desse sistema é que os vetores de informação podem ser sobrepostos. Novamente, vejamos um exemplo: o bit –1 corresponde ao vetor de informação (–1, –1) para o celular A (verifique!) e o bit 1 corresponde ao vetor de informação (1, –1) para o celular B (verifique!). Basta transmitirmos o vetor resultante $(-1,-1)+(1,-1)=(0,-2)$ e ambos celulares recebem os bits adequados (verifique!), como se a informação enviada para o outro celular não existisse. Tal propriedade é fruto dos códigos apresentados, (1, 1) e (1, –1), serem *ortogonais*, ou seja, o produto escalar dos dois é zero (pode confiar que garantimos que está certo!).

Conjuntos de 2^k-uplas cujas entradas são iguais a –1 ou 1 e são ortogonais duas a duas são denominados *Códigos de Walsh de ordem* 2^k. Tais conjuntos devem ainda ter exatamente 2^k elementos.

Para a resolução dos itens a seguir, observe que a definição generalizada de produto escalar é

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)\otimes(y_1,y_2,\dots,y_n)=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+\cdots+x_n\cdot y_n.$$

a) Uma estação base envia os seguintes vetores de informação para quatro celulares distintos X, Y, Z e W: (2,2,2,–2), (1,–1,–1,1), (1,–3,1,1), (1,–1,–1,–3). Preencha a tabela a seguir, em que indicamos os códigos de ordem 4. Determine, em cada instante, os bits recebidos por cada um deles. O produto escalar deve ser dividido por 4 nesse caso.

Código	bit 1	bit 2	bit 3	bit 4
X = (1, 1, 1, 1)				
Y = (1, –1, 1, –1)				
Z = (1, 1, –1, –1)				
W = (1, –1, –1, 1)				
Celulares que recebem bits válidos				

b) Uma maneira de construir códigos de Walsh é utilizar as linhas das *matrizes de Hadamard*, que são definidas da seguinte maneira:

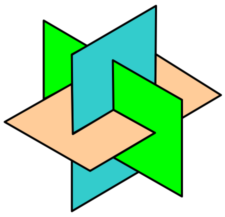
$$H_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\ H_{2^n}=\begin{bmatrix}H_{2^{n-1}} & H_{2^{n-1}}\\ H_{2^{n-1}} & -H_{2^{n-1}}\end{bmatrix}$$

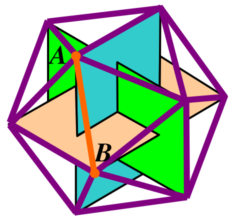
Assim, por exemplo, $H_4=\begin{bmatrix}H_2 & H_2\\ H_2 & -H_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$, gerando o código de Walsh {(1, 1, 1, 1), (1, –1, 1, –1), (1, 1, –1, –1), (1, –1, –1, 1)}.

Exiba um código de Walsh de ordem 8.

PROBLEMA 2

Um *icosaedro* é um sólido convexo com 20 faces triangulares. É possível obter um icosaedro tomando-se três retângulos congruentes em três planos perpendiculares dois a dois e cujos centros coincidem:





Sejam $2a < 2b$ as dimensões de cada retângulo.

a) Calcule a medida, em função de a e b, da aresta AB.

b) Um icosaedro é *regular* quando todas as faces são triângulos equiláteros. Mostre que o icosaedro obtido é regular se, e somente se, $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

PROBLEMA 3

Vamos mostrar um método para obter raiz quadrada de matrizes, ou seja, resolver a equação $X^2 = A$, onde A é uma matriz dada. Inicialmente, observe que para todo $\lambda \in R$,

$$X^2 = A \Leftrightarrow X^2 - \lambda^2 I = A - \lambda^2 I \Leftrightarrow (X - \lambda I)(X + \lambda I) = A - \lambda^2 I \Rightarrow \det(X - \lambda I) \cdot \det(X + \lambda I) = \det\left(A - \lambda^2 I\right),$$

sendo I a matriz identidade.

Temos que $\det(X - \lambda I)$ é um polinômio na variável λ, denominado *polinômio característico* da matriz X. Assim, escreveremos $\det(X - \lambda I) = p(\lambda)$. Utilizando essa nova notação, obtemos

$$X^2 = A \Rightarrow p(\lambda)p(-\lambda) = \det\left(A - \lambda^2 I\right).$$

A última equação nos permite encontrar todos os possíveis polinômios $p(\lambda)$ e como pelo teorema de Cayley-Hamilton (você estudou a OPM 2008?) $p(X) = 0$, podemos terminar de resolver a equação.

A título de exemplo, considere $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

O polinômio característico de X satisfaz:

$$p(\lambda)p(-\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda^2 & 1 \\ 0 & 4-\lambda^2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow p(\lambda)p(-\lambda) = \left(\lambda^2 - 1\right)\left(\lambda^2 - 4\right) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

Obtemos, assim, as seguintes possibilidades:

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \text{ ou } p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2) \text{ ou } p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2) \text{ ou } p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

Se $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$,

$$X^2 - 3X + 2I = 0 \Leftrightarrow A - 3X + 2I = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1}{3}(A + 2I) = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + \lambda - 2$:

$$X^2 + X - 2I = 0 \Leftrightarrow A + X - 2I = 0 \Leftrightarrow X = 2I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Os casos em que $p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$ e $p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$ nos fornecem, como era de se esperar, respectivamente, as respostas $X = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ e $X = -\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Pode-se verificar, substituindo, que as quatro matrizes são soluções da equação inicial.

Agora é a sua vez!

a) Resolva a equação $X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Encontre uma (apenas uma!) raiz quadrada de $\begin{pmatrix} 9 & 0 & -8 \\ 5 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 4

Seu Aldo deseja que seu filho Bernaldo coma mais legumes. Como ele sabe que Bernaldinho adora jogos, ele propõe a seguinte brincadeira: eles tomarão n caixas numeradas e em $n - 1$ delas seu Aldo colocará saudáveis porções de alfaces, cenouras e brócolis; na caixa restante será colocada uma deliciosa fatia de rocambole de goiabada. Bernaldo deverá então escolher aleatoriamente uma caixa e comer o seu conteúdo.

Tendo boas noções de probabilidades, Bernaldo não aceitou a proposta de seu pai, mas propôs uma versão alternativa do jogo, que disse ter visto em um antigo programa da TV norte-americana (de um tal de Monty Hall):

- Inicialmente, Bernaldo deveria escolher uma caixa. Então seu Aldo tomaria os números das caixas restantes e que contêm legumes (há um monte delas!), sortearia uma e a abriria mostrando o seu conteúdo para Bernaldo e eliminando-a do sorteio.
- Bernaldo agora mudaria a caixa escolhida e seu pai repetiria o procedimento anterior: tomaria os números das caixas restantes e que contêm legumes, sortearia uma e a abriria mostrando o seu conteúdo para Bernaldo e eliminando-a do sorteio.
- E tal procedimento se repetiria: a cada rodada, Bernaldo forçosamente mudaria de caixa e seu pai eliminaria uma das que possuem legumes. Até que restassem apenas duas caixas. Nesse momento, Bernaldo mudaria pela última vez a caixa escolhida e teria que ficar com o seu conteúdo.

Seu Aldo, que também conhece probabilidades, argumentou que sua diminuía as chances de Bernaldo ter uma alimentação equilibrada, mas aceitou a proposta depois que Bernaldo disse que escovaria os dentes após a sua refeição.

Neste problema calcularemos a probabilidade a_n de Bernaldo comer a fatia de rocambole, sendo n o número de caixas no início do processo. Para o nosso cálculo, analisaremos também a probabilidade b_n de ele comer a fatia de rocambole dado que inicialmente escolheu uma caixa com legumes e c_n a probabilidade de ele comer a desejada fatia dado que escolheu inicialmente o próprio rocambole.

a) Mostre que $a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)b_n + \left(\frac{1}{n}\right)c_n$.

b) Escreva uma fórmula que forneça b_n em termos de b_{n-1} e c_{n-1}.

c) Prove que $a_n - a_{n-1} = -\frac{1}{n}\left(a_{n-1} - a_{n-2}\right)$.

d) Dado que

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots,$$

demonstre que quando n cresce o valor de a_n aproxima-se de $1 - \frac{1}{e}$.

PROBLEMA 5

Um *diamante asteca de tamanho n* é um tabuleiro na forma de losango com pontas de duas casinhas e diagonais de $2n$ casinhas. Suas fileiras têm respectivamente 2, 4, 6, …, $2n - 2$, $2n$, $2n$, $2n - 2$, …, 6, 4, 2 casinhas.

Um problema clássico de Combinatória é determinar o número de coberturas de um diamante asteca de tamanho n com dominós 2×1 (isto é, que ocupam exatamente duas casinhas).

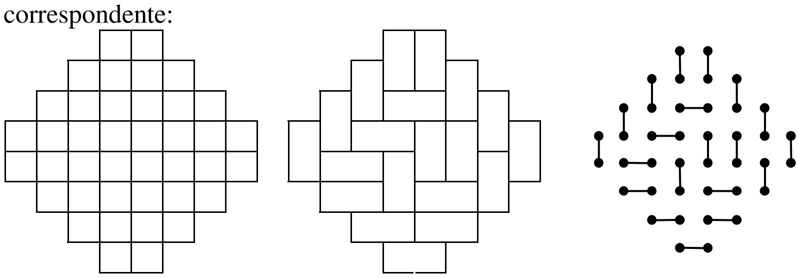
a) Seja $T(n)$ o número de maneiras de cobrir um diamante asteca de tamanho n com dominós. Pode-se mostrar (e faremos os passos principais nos itens b e c) que, para $n \geq 3$,

$$T(n)\cdot T(n-2) = 2\left(T(n-1)\right)^2 \quad (*)$$

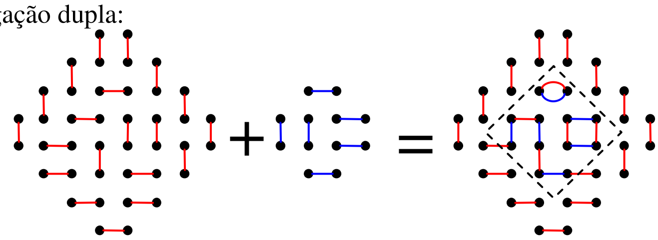
Considerando a recursão dada, determine $T(n)$.

b) Recentemente Eric H. Kuo publicou no *MIT Undergraduate Journal of Mathematics* uma nova demonstração de (*) utilizando uma técnica que ele denominou *sobreposição*. Neste problema, iremos apresentar alguns elementos essenciais da teoria criada por Eric.

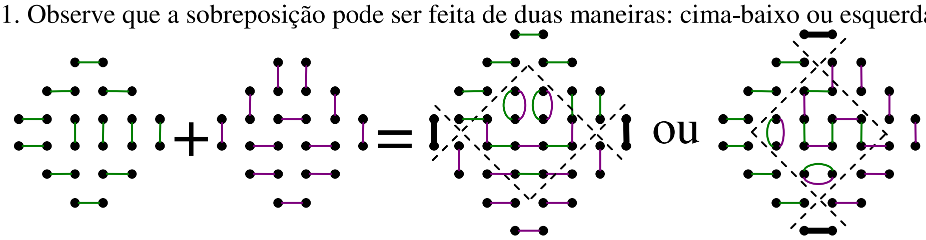
Inicialmente, vamos modelar os diamantes astecas trocando cada casinha por um ponto localizado em seu centro e ligando dois pontos quando um dominó cobre as casinhas correspondentes. Na figura a seguir, exibimos um diamante asteca de tamanho $n = 4$, uma cobertura e o modelo correspondente:



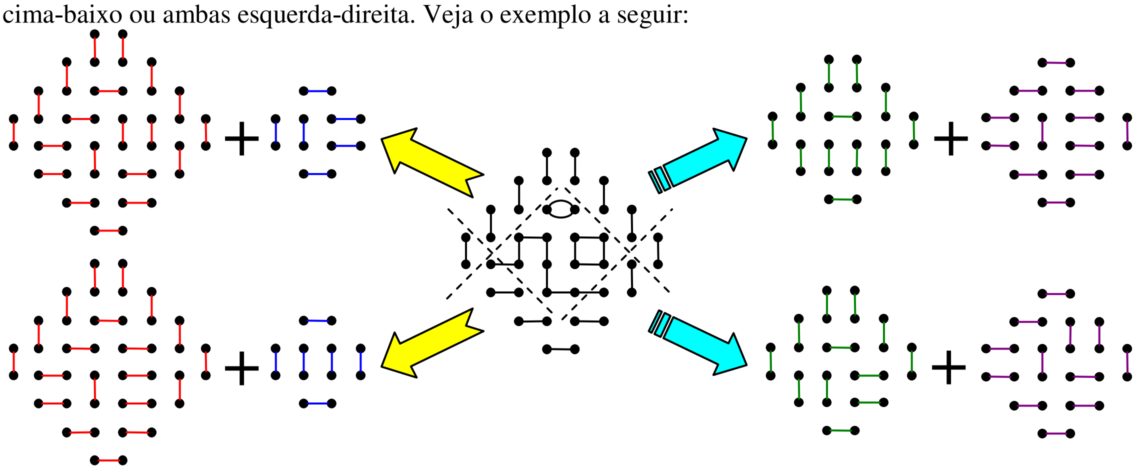
Vamos sobrepor uma cobertura de um diamante asteca de tamanho n com outra de tamanho $n - 2$. Com isso, formam-se alguns caminhos e ciclos (caminhos fechados) entre os pontos, além de possíveis ligações duplas. Por exemplo, na configuração da direita há um caminho, um ciclo e uma ligação dupla:



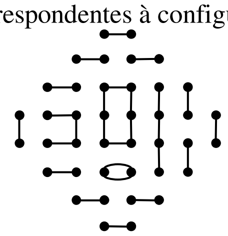
Uma configuração do mesmo tipo pode ser obtida sobrepondo duas coberturas (não necessariamente distintas) de um diamante asteca de tamanho $n - 1$. Observe que a sobreposição pode ser feita de duas maneiras: cima-baixo ou esquerda-direita.



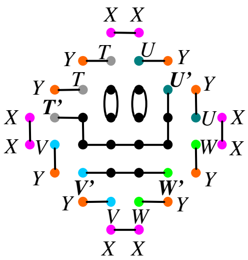
Uma grande ideia de Eric foi observar que cada configuração pode ser obtida a partir da mesma quantidade de sobreposições de coberturas de diamantes astecas de tamanhos n e $n - 2$ e sobreposições de pares de coberturas de diamantes astecas de tamanho $n - 1$, ambas cima-baixo ou ambas esquerda-direita. Veja o exemplo a seguir:



Agora é a sua vez! Obtenha todas as sobreposições correspondentes à configuração a seguir.



c) A demonstração do fato observado por Eric envolve a consideração de alguns casos. Para podermos listá-los, rotulamos os vértices T, U, V, W, X e Y, de acordo com a sua posição. Note que, dos vértices rotulados, exatamente quatro vértices, T', U', V' e W', não estão ligados a vértices do tipo Y.



Mostre que, caso T' não esteja ligado diretamente a algum X, o caminho iniciado em T' termina em U' ou V' e tem um número ímpar de segmentos. Por exemplo, na figura acima, T' está ligado a U' por um caminho com 7 segmentos.

Diga, em cada um dos casos, qual é tipo de sobreposição de coberturas de diamantes astecas $n - 1$ correspondente (cima-baixo ou esquerda-direita).