XXXIV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (6 de novembro de 2010)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

O que vale mais: toda a água potável do mundo ou todo o ouro do mundo? Estimaremos esses valores nos itens abaixo e daremos a *resposta OPM* para a pergunta.

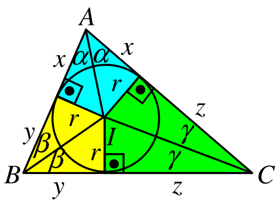
a) Segundo a Wikipédia, há 1.360.000.000 km^3 ($1{,}36\cdot 10^9$ km^3) de água no mundo, sendo somente 3% potável. Quantos litros de água potável há no mundo?

b) De acordo com uma reportagem da revista Veja, estima-se que o total de ouro extraído em toda a história da humanidade preenche um cubo de aresta 20,4 m. Sabe-se ainda que as reservas não exploradas correspondem a 47.000 toneladas. Considerando que a densidade do ouro é 19,3 kg/l à temperatura de 25^{o}C, ou seja, que cabem 19,3 kg de ouro num recipiente de volume 1 litro em um dia quentinho, determine a massa total, em toneladas, de ouro no planeta.

c) Suponha que um litro de água custe 1 real e um grama de ouro custe 80 reais. De acordo com esses dados, o que vale mais: toda a água potável do mundo ou todo o ouro do mundo? Não se esqueça de justificar a sua resposta.

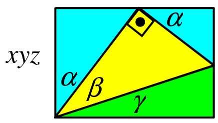
PROBLEMA 2

Seja ABC um triângulo e I o centro da sua circunferência inscrita. Traçando os raios que ligam I aos pontos de tangência, obtemos três pares de triângulos congruentes, T_a, com catetos r e x, T_b, com catetos r e y, e T_c, com catetos r e z.



a) Sendo $a = BC$, $b = CA$, $c = BC$ e $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ o semiperímetro de ABC, mostre que $x = s - a$, $y = s - b$ e $z = s - c$.

b) O retângulo a seguir é a união de triângulos semelhantes aos triângulos T_a, T_b e T_c. A partir dele, prove que $xyz = r^2(x + y + z)$, ou seja, que $xyz = r^2s$.



c) Utilizando os resultados anteriores, demonstre a fórmula de Heron para o cálculo de áreas de triângulos, ou seja,

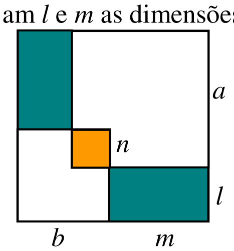
$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ .$$

Você pode querer utilizar o fato de que $S = sr$.

PROBLEMA 3

Dizemos que (a, b, c) é uma *terna pitagórica* se a, b, c são inteiros positivos tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Ou seja, a e b são os catetos e c é a hipotenusa de um triângulo retângulo de lados inteiros. Se a e b são primos entre si, temos uma *terna pitagórica primitiva*. Nesta questão provaremos que existem infinitas ternas pitagóricas primitivas (É verdade! Nem todos os triângulos retângulos são semelhantes ao (3, 4, 5)! ☺).

a) Na figura a seguir quadrados de lados a e b estão no interior de um quadrado de lado c. Seja n a medida do lado do quadrado formado pela intersecção dos quadrados menores e sejam l e m as dimensões dos retângulos destacados.



Mostre que (a, b, c) é uma terna pitagórica se, e somente se, $n^2 = 2lm$.

b) Determine todas as ternas pitagóricas que são obtidas tomando $n = 2p$, p primo ímpar, na igualdade acima.

c) Considerando as ternas obtidas em b, prove que existem infinitas ternas pitagóricas primitivas.

PROBLEMA 4

As figuras a seguir são uma *prova sem palavras* de que $\sqrt{2}$ é irracional:

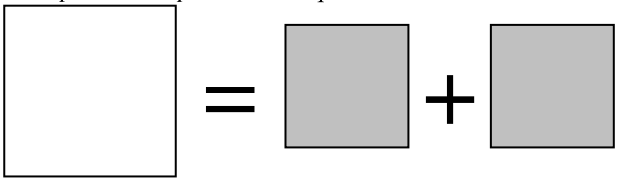


FIGURA 1

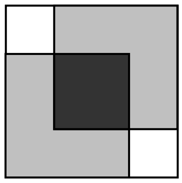


FIGURA 2

Vamos transformar essas figuras em uma prova com palavras ☺.

a) Na figura 1, sendo m o lado do quadrado maior e n o lado do quadrado menor, mostre que $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$.

b) Na figura 2, há um quadrado cinza escuro e dois quadrados brancos. Encontre, em termos de m e n, as medidas dos lados desses quadrados.

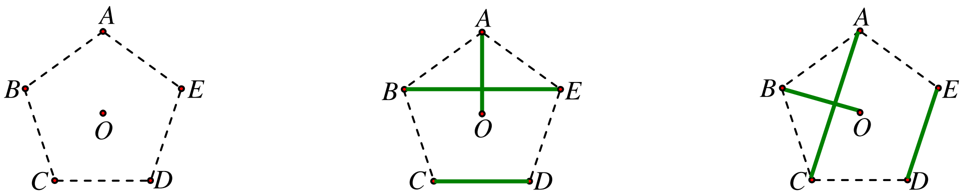
c) Baseado na prova sem palavras dada, demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.

PROBLEMA 5

Montar a tabela de um torneio em que todas as n equipes se enfrentam ao longo de $n - 1$ rodadas (como, por exemplo, em cada turno do Brasileirão) é um problema matemático bastante elaborado e que possui vários métodos de solução. Nesta questão vamos conhecer duas dessas abordagens (para conhecer mais uma, veja a prova do nível α depois do término da OPM).

Considere os vértices do pentágono regular a seguir e o seu centro. Uma maneira de construir a tabela de um torneio com 6 equipes é a seguinte. Ligamos O ao vértice A e ligamos pares dos demais vértices de modo que as retas correspondentes sejam perpendiculares à reta OA. Uma rodada do torneio é então $O \times A$; $B \times E$ e $C \times D$.

Para determinar a próxima rodada, ligamos O ao vértice B e repetimos o procedimento de tomar as perpendiculares.

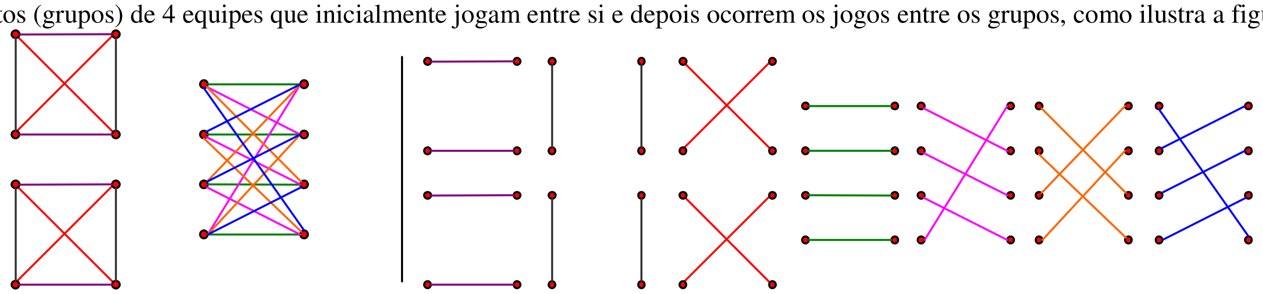


E assim por diante até termos completado as 5 rodadas. Um torneio obtido dessa maneira é denominado *"Torneio de Kirkman"*, pois tal método foi descoberto em 1846 por T. P. Kirkman.

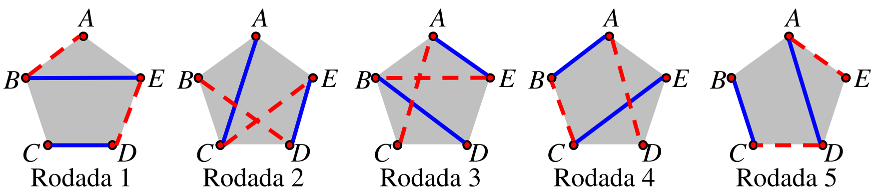
a) Determine as 5 rodadas de um torneio de Kirkman com 6 equipes (observe que já deixamos duas rodadas prontas para você).

b) Prove que ao aplicarmos o método acima para um torneio com 2010 equipes nenhum jogo irá se repetir ao longo das 2009 rodadas de 1005 jogos.

c) Existem outras maneiras de montar torneios. Por exemplo, para 8 equipes podemos imaginar que elas são divididas em dois conjuntos (grupos) de 4 equipes que inicialmente jogam entre si e depois ocorrem os jogos entre os grupos, como ilustra a figura.



Dizemos que dois torneios são *"equivalentes"* se podemos renomear os times de modo que os conjuntos de jogos coincidem. Exibimos a seguir dois torneios equivalentes com cinco equipes. Os jogos de um torneio estão em linha contínua azul e os de outro estão em linha tracejada vermelha. A tabela indica as correspondências entre equipes e rodadas.



Azul	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	Rodada	1	2	3	4	5
Vermelho	*A*	*B*	*E*	*C*	*D*	Rodada	2	5	4	1	3

Por exemplo, a rodada 1 do torneio em azul é $B \times E$ e $C \times D$. Renomeando os times segundo a tabela, obtemos $B \times D$ e $E \times C$, que são os jogos da rodada 2 do torneio em vermelho.

Demonstre que o torneio de 8 equipes montado com a estratégia da divisão inicial em dois grupos não é equivalente a um torneio de Kirkman.