XXXIV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (6 de novembro de 2010)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

O que vale mais: toda a água potável do mundo ou todo o ouro do mundo? Estimaremos esses valores nos itens abaixo e daremos a *resposta OPM* para a pergunta.

a) Segundo a Wikipédia, há 1.360.000.000 km^3 ($1{,}36 \cdot 10^9$ km^3) de água no mundo, sendo somente 3% potável. Quantos litros de água potável há no mundo?

b) De acordo com uma reportagem da revista Veja, estima-se que o total de ouro extraído em toda a história da humanidade preenche um cubo de aresta 20,4 m. Sabe-se ainda que as reservas não exploradas correspondem a 47.000 toneladas. Considerando que a densidade do ouro é 19,3 kg/l à temperatura de 25°C, ou seja, que cabem 19,3 kg de ouro num recipiente de volume 1 litro em um dia quentinho, determine a massa total, em toneladas, de ouro no planeta.

c) Suponha que um litro de água custe 1 real e um grama de ouro custe 80 reais. De acordo com esses dados, o que vale mais: toda a água potável do mundo ou todo o ouro do mundo? Não se esqueça de justificar a sua resposta.

PROBLEMA 2

Montar a tabela de um torneio em que todas as n equipes se enfrentam ao longo de $n - 1$ rodadas (como, por exemplo, em cada turno do Brasileirão) é um problema matemático bastante elaborado e que possui vários métodos de solução. Nesta questão vamos conhecer uma dessas abordagens (para conhecer outras, veja a prova do nível β depois do término da OPM).

Vamos considerar um torneio com 6 equipes. Associaremos os números 1, 2, 3, 4, 5 e ∞ (infinito) a cada uma das equipes. A primeira rodada do torneio é $1 \times \infty$, 2×5, 3×4. Para montarmos a rodada i somamos $i - 1$ a cada número envolvido nas partidas da rodada inicial, considerando que
- quando a soma ultrapassa 5, subtraímos 5 do resultado;
- ∞ adicionado a qualquer inteiro positivo é ∞.

Por exemplo, a segunda rodada será:

$$(1 + 1) \times (\infty + 1), \text{ isto é, } 2 \times \infty$$
$$(2 + 1) \times (5 + 1), \text{ isto é, } 3 \times 1$$
$$(3 + 1) \times (4 + 1), \text{ isto é, } 4 \times 5$$

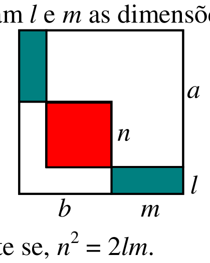
a) Determine as 3 rodadas restantes do torneio, seguindo o método descrito acima.

b) A partir do procedimento mostrado, exiba as sete rodadas de um torneio com 8 equipes.

PROBLEMA 3

Dizemos que (a, b, c) é uma *terna pitagórica* se a, b, c são inteiros positivos tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Se a e b são primos entre si, temos uma *terna pitagórica primitiva*.

a) Na figura a seguir quadrados de lados a e b estão no interior de um quadrado de lado c. Seja n a medida do lado do quadrado formado pela intersecção dos quadrados menores e sejam l e m as dimensões dos retângulos destacados.



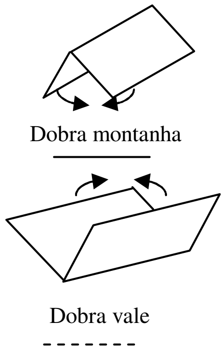
Mostre que (a, b, c) é uma terna pitagórica se, e somente se, $n^2 = 2lm$.

b) Determine as ternas pitagóricas que são obtidas tomando $n = 10$.

c) Exiba uma terna pitagórica primitiva com a e b maiores do que 2010.

PROBLEMA 4

As dobraduras são bastante conhecidas e praticadas no mundo todo, mas são especialmente populares no Japão. O físico japonês Jun Maekawa observou um resultado bastante interessante em dobraduras. Ao se desfazer uma dobradura, as marcas das dobras ficam salientes no papel, e os dois tipos de dobra, *montanha* e *vale*, ficam evidentes. Maekawa percebeu que a diferença entre as quantidades de dobras de cada tipo em cada vértice interior é 2.



Na figura abaixo, você pode observar a dobradura de um barquinho (figura 1) com as correspondentes marcas (figura 2) que ficam no papel ao desfazermos o barquinho.

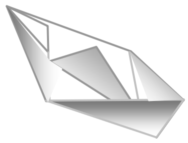


Figura 1

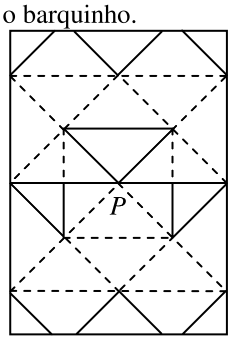
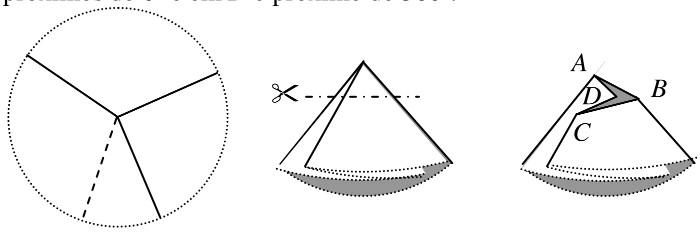


Figura 2

Se você observar cada vértice no interior da folha, vai notar que a afirmação de Maekawa é verdadeira. Por exemplo, no vértice P há 4 dobras do tipo montanha e 2 do tipo vale.

Vamos, então, mostrar o chamado *teorema de Maekawa*.

a) Ao fazermos um pequeno corte em torno de um vértice, obtemos um polígono, cujos ângulos internos podem ser próximos de 0º ou próximos de 360º. Na figura a seguir, obtém-se o polígono $ABCD$, cujos ângulos internos em A, B e C são próximos de 0º e em D é próximo de 360º.



Note que, na figura acima, ângulos próximos a 0º correspondem a dobras do tipo montanha e o ângulo próximo a 360º corresponde à dobra do tipo vale.

Se olharmos a mesma dobradura do outro lado do papel, qual é a correspondência entre os tipos de ângulo (0º e 360º) e os tipos de dobra (vale e montanha)?

b) Esboce o polígono obtido ao fazermos um pequeno corte em torno do vértice P da figura 2.

c) Mostre que, ao considerarmos as dobras em torno de um vértice interior, a quantidade de dobras do tipo montanha é igual à quantidade de dobras do tipo vale mais ou menos 2. Ou seja, sendo m a quantidade de dobras montanha e v a quantidade de dobras do tipo vale, temos $m - v = 2$ ou $v - m = 2$.

Você pode querer utilizar o fato de que a soma dos ângulos internos de um polígono de n vértices é $(n - 2)\cdot 180º$.

PROBLEMA 5

"Sudokuto" é um jogo inspirado no Sudoku. Ele é jogado sobre tabuleiros quadriculados de diversos tamanhos. Vamos começar conhecendo a versão mais simples da brincadeira, a qual é jogada sobre um tabuleiro 3×3.

Alternadamente, dois jogadores colocam 1, 2 ou 3 em um quadradinho que ainda esteja vazio. Não podem aparecer em linhas (horizontais) ou em colunas (verticais) dois números iguais. Vence quem completar primeiro uma fileira horizontal ou vertical ou, caso nenhum movimento possa ser feito e nenhuma fileira estiver completa, vence quem fez a última jogada. Abaixo mostramos dois exemplos de partidas.

Os números menores indicam as jogadas. Por exemplo, na partida da esquerda, o 1º jogador colocou 1 na casa superior direita; em seguida, o 2º jogador colocou 1 no centro, e assim por diante.

	2_4	1_1
	1_2	2_5
3_3		

Não há jogadas possíveis; o 1º jogador vence

	1_1	
3_4		2_2
2_3	3_6	1_5

O 2º jogador vence na sexta jogada

a) Qual deve ser a próxima jogada do 1º jogador para que ele consiga completar uma fileira e vencer a partida a seguir, não importando quais sejam as jogadas do 2º jogador? Indique a jogada no diagrama da sua folha de respostas.

2		
	1	

b) Mostre que o 1º jogador possui uma estratégia vencedora para o tabuleiro 3×3. Ou seja, diga qual deve ser a sua jogada inicial e, a partir daí, mostre que ele consegue chegar à vitória, não importando quais sejam as jogadas do segundo jogador.

c) Vamos conhecer agora a versão sobre o tabuleiro 4×4.

Agora, os jogadores colocam, alternadamente, 1, 2, 3 ou 4 nos quadradinhos ainda vazios. Além de não poderem aparecer dois números iguais nas linhas e colunas, também não podem aparecer dois números iguais nas quatro regiões 2×2 destacadas. Vence quem completar primeiro uma fileira horizontal ou vertical ou região 2×2 ou, caso nenhum movimento possa ser feito e nenhuma fileira ou região esteja completa, vence quem fez a última jogada. Veja a reprodução da final do campeonato mundial, vencida por Sudokaldo.

	1_1	3_8	4_{11}
3_{10}	4_5		2_3
2_4		4_6	3_9
4_{12}	3_7	1_2	

Tendo como inspiração o grande mestre Sudokaldo, mostre que o 2º jogador possui uma estratégia vencedora para o tabuleiro 4×4.

Para mais Sudokuto, além de outros jogos e quebra-cabeças, visite http://www.menneske.no (não se assuste, o site tem versão em Inglês).