XXXI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (10 de novembro de 2007)

Nível γ(1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Em mil lançamentos de uma moeda honesta, qual é a maior seqüência de resultados iguais consecutivos que, em média, é obtida? Neste problema vamos ajudar você a responder a essa questão.

Seja p a probabilidade de obter coroa em um lançamento e seja n o número de lançamentos. (Sim, $p = \frac{1}{2}$ e $n = 1000$. Mas, deste modo, as fórmulas ficam mais simples.)

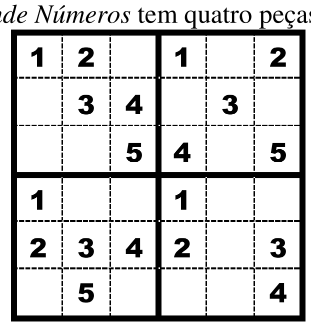
Considere uma seqüência de k lançamentos consecutivos. Na média, em p^k deles obtemos k caras consecutivas; da mesma forma, na média em p^k deles obtemos k coroas consecutivas. Assim, sendo n a quantidade de lançamentos, espera-se $2p^k n$ seqüências de pelo menos k faces iguais consecutivas. Logo o número de seqüências com exatamente k faces iguais consecutivas é, em média, $2p^k n - 2p^{k+1} n = 2np^k(1-p)$, que neste caso é igual a $n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

a) Sendo n inteiro positivo, resolva a equação $n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$ no universo $U = R$.

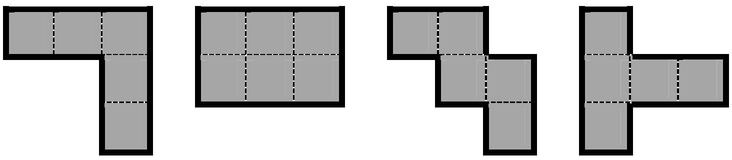
b) Responda à pergunta que fizemos no início do problema.

PROBLEMA 2

O jogo *Esconde Números* tem quatro peças e um tabuleiro dividido em quatro regiões com números pintados, como mostra a figura.



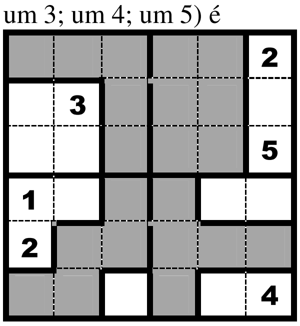
Tabuleiro



Peças

Além do tabuleiro e das peças, o jogo tem cartelas com desafios. Cada desafio corresponde a uma coleção de números, possivelmente com números repetidos ou omitidos. O jogador deve colocar uma peça sobre cada região e cobrir todos os números, exceto os números do desafio.

Por exemplo, uma solução do desafio (um 1; dois 2; um 3; um 4; um 5) é



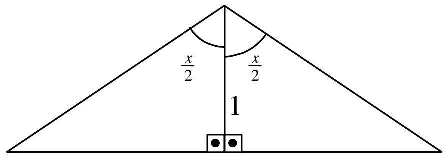
a) De quantas maneiras podemos colocar as peças nas regiões?

b) Mostre que a quantidade de desafios é menor ou igual a 2500.

c) Mostre que existem desafios com mais de uma solução.

PROBLEMA 3

a) Observando a figura a seguir, prove que, para $0 < x < \pi$, temos $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ e $\operatorname{sen} x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$.



b) Resolva, no universo $U =]0;\pi[$, a equação $\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x = \cos x \cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

PROBLEMA 4

Sejam *ABCD* um tetraedro de volume *V* e *P*, um ponto em seu interior. Os planos α, β, γ e δ são paralelos às faces *BCD*, *ACD*, *ABD* e *ABC*, respectivamente, e determinam em *ABCD* quatro tetraedros de volumes V_1, V_2, V_3 e V_4, respectivamente.

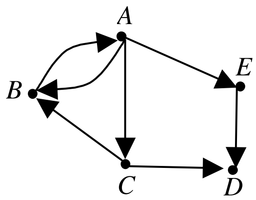
a) Sejam d_1 , d_2 , d_3 e d_4 as distâncias do ponto *P* às faces *BCD*, *ACD*, *ABD* e *ABC*, respectivamente, e S_1 , S_2 , S_3 e S_4 as áreas de *BCD*, *ACD*, *ABD* e *ABC*, respectivamente. Prove que $V = \dfrac{1}{3}(S_1 d_1 + S_2 d_2 + S_3 d_3 + S_4 d_4)$.

b) Mostre que, para $1 \le i \le 4$, $\dfrac{S_i d_i}{3} = V \cdot \sqrt[3]{\dfrac{V_i}{V}}$ e conclua que $\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2} + \sqrt[3]{V_3} + \sqrt[3]{V_4}$.

PROBLEMA 5

Um *grafo orientado* é formado por um conjunto finito $V = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, cujos elementos denominamos *vértices*, e por um conjunto $E \subset V \times V$; os elementos de *E* são denominados *arestas*. O estudo de estruturas como essas é uma área muito importante da Matemática contemporânea denominada *Teoria dos Grafos*. Os chamados grafos são vitais para a Computação e suas aplicações estendem-se até aos Negócios e às Ciências Sociais.

Vejamos um exemplo que dá uma mostra bastante simplificada do que pode ser feito em Teoria dos Grafos. Vamos supor que em um estudo sociológico observaram-se as seguintes relações: Arnaldo influencia Bernaldo; Arnaldo influencia Cernaldo; Arnaldo influencia Ernaldo; Bernaldo influencia Arnaldo; Cernaldo influencia Bernaldo; Cernaldo influencia Dernaldo e Ernaldo influencia Dernaldo. Então tomando $V = \{A, B, C, D, E\}$ e $E = \{(A,B), (A,C), (A,E), (B,A), (C,B), (C,D), (E,D)\}$ obtemos o grafo que representa essencialmente a situação descrita, o qual usualmente é representado através de um diagrama como o mostrado abaixo, à esquerda.



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad [A(G)]^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Seja *G* um grafo orientado com n vértices. Consideramos a matriz $n \times n$ com $a_{ij} = 1$ se (P_i, P_j) é uma aresta de *G* e $a_{ij} = 0$ caso contrário. Tal matriz é denominada *matriz de adjacência* de *G* e é indicada por $A(G)$. Acima, à direita, exibimos a matriz de adjacência do exemplo dado e o seu quadrado, $[A(G)]^2 = A(G) \cdot A(G)$.

Um *caminho* entre os vértices P_i e P_j em um grafo orientado *G* é uma seqüência de vértices $P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{im}$ em que $P_{i1} = P_i$, $P_{im} = P_j$ e $(P_{ik}, P_{i(k+1)})$ é uma aresta de *G*, $1 \le k < m$. Ou seja, podemos partir do vértice P_i e, percorrendo arestas de *G*, ir até P_j .

a) Mostre que, em todo grafo orientado *G*, o elemento b_{ij} da matriz $[A(G)]^2$ é igual à quantidade de caminhos entre P_i a P_j com exatamente duas arestas.

b) Prove que existe um caminho entre quaisquer dois vértices distintos de um grafo orientado *G* de *n* vértices se, e somente se, $A(G) + [A(G)]^2 + \cdots + [A(G)]^{n-1}$ é uma matriz formada apenas por números positivos.