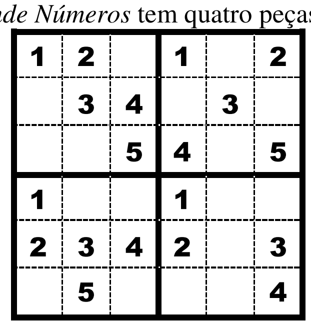
XXXI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (10 de novembro de 2007)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

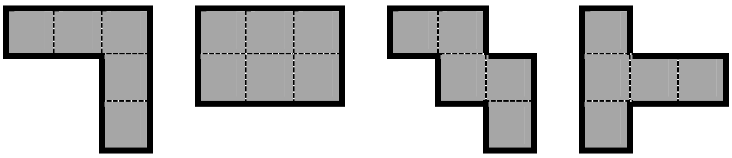
<u>*Folha de Perguntas*</u>

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

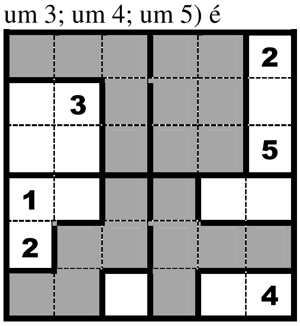
PROBLEMA 1
O jogo *Esconde Números* tem quatro peças e um tabuleiro dividido em quatro regiões com números pintados, como mostra a figura.



Tabuleiro

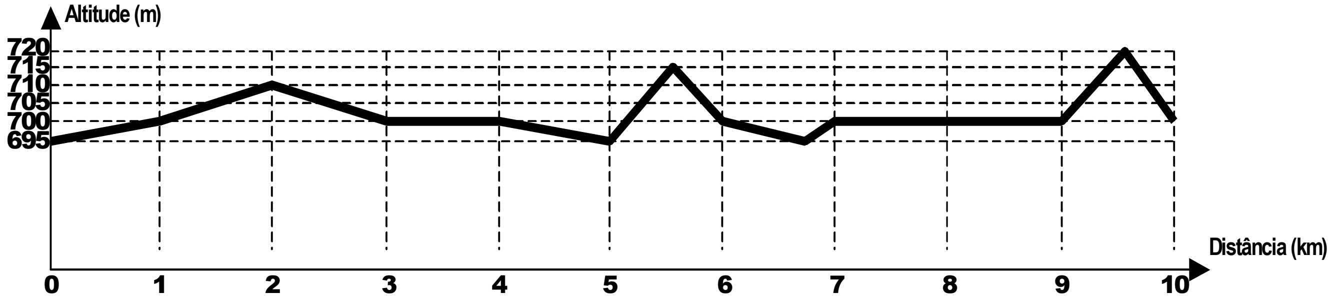

Peças

Além do tabuleiro e das peças, o jogo tem cartelas com desafios. Cada desafio corresponde a uma coleção de números, possivelmente com números repetidos ou omitidos. O jogador deve colocar uma peça sobre cada região e cobrir todos os números, exceto os números do desafio.
Por exemplo, uma solução do desafio (um 1; dois 2; um 3; um 4; um 5) é



Agora é a sua vez!
Encontre uma solução para o desafio (um 1; um 2; um 3; um 4), desenhando as peças sobre o tabuleiro no seu *Bloco de Resoluções*.

PROBLEMA 2
Amanhã, na avenida da Raia da USP (logo aí ao lado; talvez você consiga vê-la pela janela!), haverá a largada de uma corrida de 10 quilômetros, a Nike 10K.
Um dos aspectos mais importantes para quem participa de corridas longas é a variação de altitude do percurso de prova, ou seja, o quanto as subidas e descidas são inclinadas. Para tanto, a organização do evento fez um gráfico indicando a altitude de acordo com a distância do percurso:



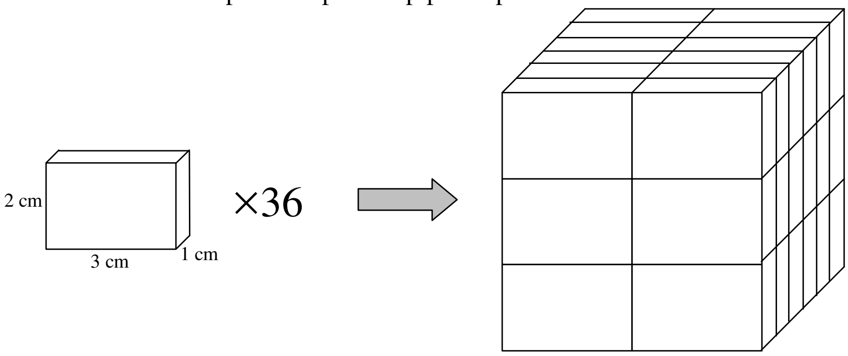
a) Qual é a diferença entre as altitudes do ponto mais alto e do ponto mais baixo do percurso da Nike 10K?
b) Um dos pontos cruciais da corrida de São Silvestre, realizada no último dia do ano em São Paulo, é quando os corredores sobem a avenida Brigadeiro Luiz Antônio, a "subida da Brigadeiro". Sabendo que as altitudes nos quilômetros 13 e 14 da corrida de São Silvestre, que compreendem a avenida, são respectivamente 782 m e 811 m, em qual das duas competições os corredores enfrentam a subida mais inclinada? Não se esqueça de justificar sua resposta!

PROBLEMA 3

O professor Piraldo tem uma coleção muito grande de paralelepípedos, todos especiais: eles têm dimensões de medidas inteiras em centímetros e, em cada um deles, suas três dimensões são diferentes. Paralelepípedos que podem pertencer à estimada coleção do professor Piraldo são chamados *paralelepípedos piraldianos*. Exemplos de tais paralelepípedos são o $1\,\text{cm}\times 2\,\text{cm}\times 3\,\text{cm}$ e o $2\,\text{cm}\times 6\,\text{cm}\times 10\,\text{cm}$. Em compensação, os paralelepípedos $1\,\text{cm}\times 1\,\text{cm}\times 3\,\text{cm}$ e $2{,}5\,\text{cm}\times 3\,\text{cm}\times 4\,\text{cm}$ não são piraldianos.

Apesar de não ter cubos em sua coleção, o professor Piraldo gosta de montá-los utilizando paralelepípedos piraldianos. Porém, ele só monta cubos se todos os paralelepípedos utilizados forem iguais, ou seja, ele não mistura paralelepípedos de tamanhos diferentes. Além disso, todos os legítimos cubos montados por Piraldo são maciços, ou seja, ele não deixa espaços ocos.

Um exemplo é um cubo de aresta 6 cm obtido a partir de paralelepípedos piraldianos $1\,\text{cm}\times 2\,\text{cm}\times 3\,\text{cm}$:



a) Qual é o paralelepípedo piraldiano que deve ser usado para a montagem de um cubo de aresta 4 cm?

b) Qual é o menor cubo que Piraldo pode montar com paralelepípedos piraldianos? Não se esqueça de justificar sua resposta.

PROBLEMA 4

A mãe de Arnaldo pediu para ele ir à papelaria e comprar para ela 16 lápis, 24 canetas e 8 cadernos. Deu a ele R$100,00 para pagar a conta, pois não sabia o valor de cada item. Sabe-se que esses materiais são vendidos por unidade.

Quando ele voltou, entregou a sua mãe o pacote com os materiais e o troco.

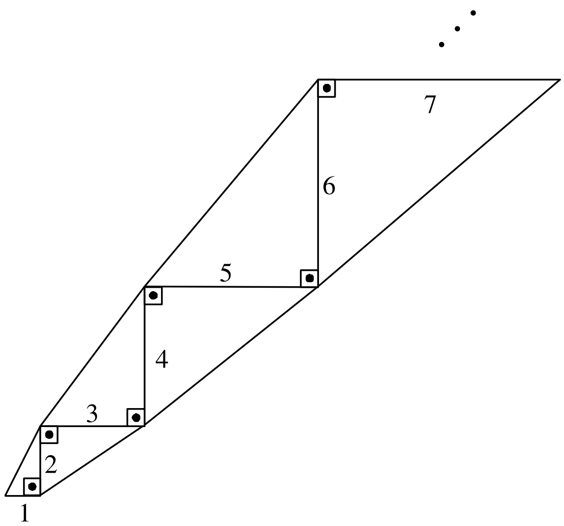
a) Na papelaria, as canetas custam R$1,20 por unidade, ou ainda, 120 centavos de real por unidade. Qual é o valor que Arnaldo gastou, em centavos de real, com as canetas?

b) Mostre que o valor total da compra, em centavos, é um múltiplo de 8.

c) Ela observou que o troco consistia em algumas notas de R$10,00 e apenas uma nota de R$5,00. Imediatamente disse a Arnaldo que o troco estava errado. Como ela pôde descobrir isso tão rapidamente sem saber os preços dos itens?

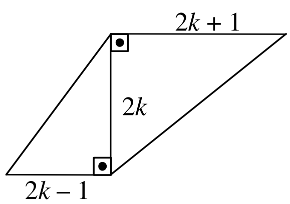
PROBLEMA 5

Melissa colou vários triângulos retângulos, todos com catetos de medidas inteiras e consecutivas. Ela sempre cola os triângulos em catetos de mesma medida. A figura a seguir mostra o começo do trabalho de Melissa:



O último triângulo que ela colou tem catetos $2n$ e $2n + 1$, sendo n inteiro positivo.

a) Sendo a área do triângulo retângulo de catetos a e b igual a $\frac{a\cdot b}{2}$, calcule, em termos de k, a área da figura a seguir:



b) Prove que a área da figura de Melissa é igual à soma dos quadrados dos números pares de 2 até $2n$.

c) Mostre que $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2+n(2n+1)$.

Observação: chamamos *triângulo retângulo* todo triângulo que tem um ângulo interno de 90º. Os lados que formam o ângulo de 90º são chamados *catetos*. O lado oposto ao ângulo de 90º é chamado *hipotenusa*.