XXII OLIMPÍADA de MAIO
Segundo Nível
Maio de 2016

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não podes usar máquina de calcular; não podes consultar livros nem apontamentos.
Justifica cada uma das respostas.
Ao participar comprometes-te a não divulgar os problemas até 27 de maio.

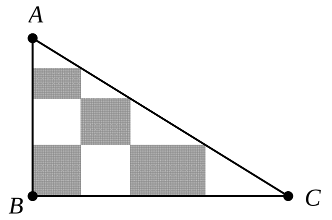
PROBLEMA 1
Um número de quatro algarismos $\overline{abcd}$, que começa no algarismo a e termina no algarismo d, é *intercambiável* se existe um inteiro $n > 1$ tal que $n \times \overline{abcd}$ é um número de quatro algarismos que começa em d e termina em a. Por exemplo, 1009 é intercambiável uma vez que $1009 \times 9 = 9081$. Encontra o maior número intercambiável.

PROBLEMA 2
Quantas quadrículas se devem pintar, no mínimo, num tabuleiro 5×5 de tal modo que, em cada linha, em cada coluna e em cada quadrado 2×2, haja pelo menos uma quadrícula pintada?

PROBLEMA 3
Um número inteiro positivo é *qua-divi* se é divisível pela soma dos quadrados dos seus algarismos, e além disso nenhum dos seus algarismos é igual a zero.
a) Encontra um número qua-divi tal que a soma dos seus algarismos seja 24.
b) Encontra um número qua-divi tal que a soma dos seus algarismos seja 1001.

PROBLEMA 4
Num triângulo $[ABC]$, sejam D e E pontos dos lados $[BC]$ e $[AC]$, respetivamente. Os segmentos $[AD]$ e $[BE]$ intersetam-se em O. Suponhamos que a base média do triângulo paralela a $[AB]$, divide o segmento $[DE]$ ao meio. Demonstra que o triângulo $[ABO]$ e o quadrilátero $[ODCE]$ têm áreas iguais.

PROBLEMA 5
A Rosa e a Sara jogam com um triângulo $[ABC]$, retângulo em B. A Rosa começa por marcar dois pontos interiores da hipotenusa $[AC]$, depois a Sara marca um ponto interior da hipotenusa distinto dos da Rosa. Em seguida, desde estes três pontos traçam-se as perpendiculares aos lados $[AB]$ e $[BC]$, formando-se a seguinte figura.



A Sara ganha se a área da superfície sombreada é igual à área da superfície não sombreada; caso contrário ganha a Rosa. Determina qual das duas tem estratégia vencedora.