XXI OLIMPÍADAS de MAIO
Segundo Nível
Maio de 2015

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não podes usar calculadora; não podes consultar livros nem apontamentos.
Justifica cada uma das tuas respostas.
Ao participar comprometes-te a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

A Ana e a Célia venderam vários objetos e obtiveram por cada objeto tantos euros como objetos que venderam. O dinheiro obtido consiste em algumas notas de 10 euros e menos de 10 moedas de 1 euro. Decidem distribuir o dinheiro do seguinte modo: a Ana fica com uma nota de 10 euros e depois a Célia fica com outra nota, e assim sucessivamente até que a Ana fica com a última nota de 10 euros, e a Célia com todas as moedas de 1 euro. A Ana ficou com quantos euros a mais que a Célia?
Indica todas as possibilidades.

PROBLEMA 2

Num tabuleiro quadriculado 7×7 queremos pintar algumas quadrículas de modo que qualquer sub-tabuleiro 3×3 tenha mais quadrículas pintadas que por pintar. Qual é a menor quantidade de quadrículas que se devem pintar? Mostrar uma configuração com essa quantidade de quadrículas pintadas e explicar porque não é possível com menos.
Nota: Um sub-tabuleiro 3×3 é um quadrado formado por 9 quadrículas do tabuleiro.

PROBLEMA 3

Seja $[ABCDEFGHI]$ um polígono regular de 9 lados. Os segmentos $[AE]$ e $[DF]$ intersetam-se em P. Demonstrar que PG e AF são perpendiculares.

PROBLEMA 4

Num quadro estão escritos os primeiros 510 inteiros positivos: 1, 2, 3, ..., 510. Uma *operação* consiste em apagar dois números cuja soma seja um número primo. Qual é o máximo número de operações seguidas que se pode fazer? Mostrar como se consegue e explicar porque não se pode fazer mais operações.

PROBLEMA 5

Consideram-se 65 pontos do plano. Traçam-se todas as retas que passam por dois deles e obtêm-se exatamente 2015 retas distintas. Demonstrar que pelo menos quatro dos pontos são colineares.