XVIII OLIMPÍADA de MAIO
Segundo Nível
Maio de 2012

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não podes usar máquina de calcular; não podes consultar livros nem apontamentos.
Justifica cada uma das respostas.
Ao participar comprometes-te a não divulgar (colocar na internet) os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

Um número de quatro algarismos é *tartamudo* se tem os dois primeiros algarismos iguais entre si e os dois últimos algarismos iguais entre si (por exemplo 3311 e 2222 são números tartamudos). Encontra todos os números tartamudos de quatro algarismos que são quadrados perfeitos.

PROBLEMA 2

São dados dois octógonos regulares de cartolina. Numeram-se os vértices de cada octógono de 1 a 8, por qualquer ordem (a ordem de um octógono pode ser diferente da do outro). Depois sobrepõem-se os octógonos, de modo que cada vértice de um fique em contacto com um vértice do outro. Multiplicam-se os números dos vértices em contacto, e somam-se os 8 produtos obtidos.
Demonstra que, qualquer que seja a ordem em que se tenham numerado os vértices, é sempre possível sobrepor os octógonos de maneira que essa soma seja maior ou igual a 162.

PROBLEMA 3

No triângulo $[ABC]$, tem-se $\hat{B} = 2\hat{C}$, $\hat{A} > 90^\circ$ e M é o ponto médio de $[BC]$. A perpendicular a $[AC]$ que passa por C intersecta a recta AB no ponto D. Demonstra que $A\hat{M}B = D\hat{M}C$.

PROBLEMA 4

São dados seis pontos de modo que não há três sobre uma mesma recta e que os comprimentos dos segmentos determinados por estes pontos são todos distintos. Consideramos todos os triângulos que têm os seus vértices nestes pontos. Demonstra que há um segmento que é ao mesmo tempo o lado mais pequeno de um desses triângulos e o lado maior de outro.

PROBLEMA 5

São dadas 27 caixas alinhadas; cada uma com, pelo menos, 12 bolas. A operação permitida é transferir uma bola de uma caixa até à sua vizinha da direita, sempre e quando essa vizinha contenha mais bolas que a caixa de onde se retira a bola. Dizemos que uma distribuição inicial das bolas é *feliz* se é possível conseguir, mediante uma sucessão de operações permitidas, que todas as bolas fiquem numa mesma caixa. Determina qual é o menor número total de bolas com o qual se pode ter uma distribuição inicial feliz.