XVII OLIMPÍADA de MAIO

Segundo nível
Maio de 2011

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não podes usar máquina de calcular nem consultar livros e apontamentos.
Justifica cada uma das tuas respostas.
Não deves divulgar os problemas até dia 25 de Maio.

PROBLEMA 1

Determinar um número inteiro positivo x tal que a soma dos algarismos de x seja maior que 2011 vezes a soma dos algarismos do número $3x$.

PROBLEMA 2

Dizemos que um número de quatro algarismos $abcd$ $(a \neq 0)$ é $porá$ se se verificam as seguintes condições:

- $a \geq b$;
- $ab - cd = cd - ba.$

Por exemplo, 2011 é $porá$ porque $20 - 11 = 11 - 02.$

Determinar todos os números $porá$.

PROBLEMA 3

Num triângulo rectângulo $[ABC]$ tal que $\overline{AB} = \overline{AC}$, M é o ponto médio de $[BC]$. Seja P um ponto da mediatriz de $[AC]$ que pertence ao semiplano determinado por BC que não contém A. As rectas CP e AM intersectam-se em Q. Determinar o ângulo formado por AP e BQ.

PROBLEMA 4

Dados n pontos numa circunferência escreve-se ao lado de um deles um 1 e ao lado de cada um dos outros um 0. A operação permitida consiste em escolher um ponto que tenha um 1 e trocar o número desse ponto e também os números dos seus dois vizinhos, o da esquerda e o da direita (onde estiver um 1 escreve-se 0 e onde estiver 0 escreve-se 1.

a) Se $n = 101$, mostrar que se consegue, através de uma sucessão de operações permitidas, que cada um dos n pontos tenha o número 0.

b) Se $n = 102$, demonstrar que é impossível conseguir ter todos iguais a 0.

PROBLEMA 5

Determinar para que números naturais n é possível cobrir completamente um tabuleiro $n \times n$, dividido em quadrículas 1×1, com peças como as da figura, sem buracos nem sobreposições e sem sair do tabuleiro. Cada uma das peças cobre exactamente seis quadrículas.

Nota: As peças podem girar.