XVI OLIMPÍADA de MAIO
Segundo Nível
Maio de 2010

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não podes usar calculadora; não podes consultar livros nem apontamentos.
Justifica cada uma das tuas respostas.
Ao participar comprometes-te a não divulgar os problemas até 25 de Maio.

PROBLEMA 1

Determina o menor inteiro positivo que tem todos os algarismos iguais a 4 e é múltiplo de 169.

PROBLEMA 2

Considere-se o rectângulo [*ABCD*] e a circunferência de centro *D* e raio *DA*, que intersecta o prolongamento do lado [*AD*] no ponto *P*. A recta *PC* intersecta a circunferência no ponto *Q* e a recta *AB* no ponto *R*. Demonstra que $QB = BR$.

PROBLEMA 3

Encontrar o mínimo $k > 2$ para o qual existem *k* números inteiros consecutivos tais que a soma dos seus quadrados é um quadrado perfeito.

PROBLEMA 4

Seja *n* um inteiro tal que $1 < n < 2010$. Dado um polígono regular de 2010 lados e *n* moedas, pintam-se os vértices do polígono utilizando *n* cores dadas, e depois colocam-se as *n* moedas em *n* vértices do polígono. Em seguida, em cada segundo, deslocam-se todas as moedas para os vértices vizinhos, girando no sentido dos ponteiros do relógio.

Determina os valores de *n* para os quais é possível colorir os vértices e escolher as posições iniciais das moedas, de modo que as *n* moedas estejam sempre todas em vértices de cores diferentes.

PROBLEMA 5

São dadas as seguintes peças: um rectângulo 4×1, dois rectângulos 3×1, três rectângulos 2×1 e quatro quadrados 1×1. O Afonso e o Bernardo jogam o seguinte jogo num tabuleiro $n \times n$, onde *n* é um número escolhido pelo Afonso. Em cada jogada, o Bernardo recebe do Afonso uma peça *R*. Em seguida, o Bernardo analisa se pode colocar *R* no tabuleiro de modo que não tenha pontos em comum com nenhuma das peças colocadas anteriormente (nem sequer um vértice comum). Se existir um lugar para colocar *R*, o Bernardo deve escolher umas das possibilidades e colocar *R*. O jogo termina se é impossível colocar *R* da forma indicada, e o Bernardo ganha. O Afonso só ganha se as 10 peças forem colocadas no tabuleiro.

a) Suponhamos que o Afonso dá as peças ao Bernardo por ordem decrescente de tamanho. Qual é o menor *n* que garante ao Afonso a vitória?

b) Para o *n* determinado em a), se o Bernardo recebe as peças por ordem crescente de tamanho, está garantida a vitória do Afonso?

NOTA: Cada peça deve cobrir exactamente um número de quadrados unitários do tabuleiro igual ao seu próprio tamanho. Os lados das peças podem coincidir com partes do bordo do tabuleiro.