

XIV OLIMPIÁDA de MAIO
Segundo nível
Maio de 2008



Duração da prova: 3 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Não podes usar máquina de calcular nem consultar livros e apontamentos.

Justifica cada uma das tuas respostas.

Não deves divulgar os problemas até dia 25 de Maio.

PROBLEMA 1

No quadro está escrita a seguinte expressão

$$1 - 2 - 2^2 - 2^3 - 2^4 - 2^5 - 2^6 - 2^7 - 2^8 - 2^9 - 2^{10}.$$

O João coloca parêntesis de diferentes maneiras e efectua os cálculos. Por exemplo, assim

$$1 - 2 - (2^2 - 2^3) - 2^4 - (2^5 - 2^6 - 2^7) - 2^8 - (2^9 - 2^{10}) = 403$$

ou assim

$$1 - (2 - 2^2 - (2^3 - 2^4) - (2^5 - 2^6 - 2^7)) - (2^8 - 2^9) - 2^{10} = -933.$$

Quantos resultados diferentes pode obter o João?

PROBLEMA 2

No rectângulo $ABCD$ de lados AB , BC , CD e DA , seja P um ponto do lado AD tal que $\hat{BPC} = 90^\circ$. A perpendicular a BP traçada por A intersecta BP em M e a perpendicular a CP traçada por D intersecta CP em N .

Demonstra que o centro do rectângulo está no segmento MN .

PROBLEMA 3

Nos números $1010 \dots 101$ alternam-se uns e zeros; se há n uns, há $n - 1$ zeros ($n \geq 2$).

Determina os valores de n para os quais o número $1010 \dots 101$, que tem n uns, é primo.

PROBLEMA 4

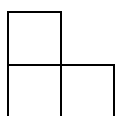
No plano há 16 rectas tais que não há duas paralelas nem três concorrentes. O Sebastião tem que pintar os 120 pontos que são intersecção de duas das rectas de modo que em cada recta todos os pontos sejam de cores diferentes.

Determina o número mínimo de cores que o Sebastião necessita para realizar a sua tarefa.

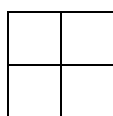
E se forem 15 rectas (nesse caso, os pontos são 105)?

PROBLEMA 5

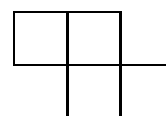
O Matias cobriu um tabuleiro quadrado 7×7 , dividido em quadrados 1×1 , com peças dos três tipos seguintes



tipo 1



tipo 2



tipo 3

sem buracos, nem sobreposições e sem sair do tabuleiro.

Cada peça do tipo 1 cobre exactamente 3 quadrados 1×1 e cada peça do tipo 2 ou do tipo 3 cobre exactamente 4 quadrados 1×1 .

Determina o número de peças do tipo 1 que o Matias pode ter usado (as peças podem ser rodadas).