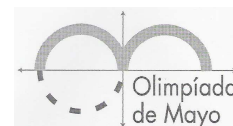


XI OLIMPIÁDA de MAIO
Segundo nível
Mai de 2005



Duração da prova: 3 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Não podes usar máquina de calcular nem consultar livros e apontamentos.

Justifica cada uma das tuas respostas.

Não deves divulgar os problemas até dia 25 de Maio.

PROBLEMA 1

Determina o menor número natural de três algarismos que seja o produto de dois números de dois algarismos, de modo que os sete algarismos destes três números sejam todos diferentes.

PROBLEMA 2

O Gonçalo escreve no quadro quatro números escolhidos entre 0,1,2,3 ou 4, podendo repetir números. O Nicolau realiza várias vezes a seguinte operação: escolhe um dos números e substitui-o pelo resto na divisão por 5 do produto de outros dois números do quadro à sua escolha. O objectivo do Nicolau é conseguir que os quatro números sejam iguais. Determina se o Gonçalo pode escolher os números iniciais de modo que o Nicolau não consiga atingir o seu objectivo.

PROBLEMA 3

No triângulo isósceles $[ABC]$, com $\overline{AB} = \overline{AC}$, seja M o ponto médio de $[BC]$. O ponto D no lado $[BC]$ é tal que $B\hat{A}D = \frac{1}{6}B\hat{A}C$. Além disso a recta perpendicular a $[AD]$ por C intersecta $[AD]$ em N de modo que $\overline{DN} = \overline{DM}$. Calcula os ângulos do triângulo $[ABC]$.

PROBLEMA 4

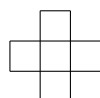
Num baile há 12 homens, numerados de 1 a 12, e 12 mulheres, numeradas de 1 a 12. A cada homem associa-se além disso um “amigo secreto” entre os outros 11. Todos dançaram todas as músicas. Na primeira música cada homem dançou com a mulher que tem o mesmo número. A partir daí cada homem dançou a nova música com a mulher que tinha dançado na música anterior com o seu amigo secreto. Na terceira música os pares foram

Homens	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Mulheres	5	11	2	12	8	10	9	4	6	3	7	1

Encontra o número do amigo secreto de cada homem.

PROBLEMA 5

Sobre um tabuleiro 9×9 pousa a nave inimiga que cobre exactamente 5 quadrados do tabuleiro, da forma indicada na figura.



A nave é invisível. Cada míssil defensivo cobre exactamente um quadrado e destrói a nave se a atinge em algum dos cinco quadrados que ela ocupa. Determina o número mínimo de mísseis que são necessários para destruir com certeza a nave inimiga.