XXII OLIMPÍADA de MAIO
Primeiro Nível
Maio de 2016

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não podes usar máquina de calcular; não podes consultar livros nem apontamentos.
Justifica cada uma das respostas.
Ao participar comprometes-te a não divulgar os problemas até 27 de maio.

PROBLEMA 1

Numa folha estão escritos sete números inteiros positivos diferentes. O produto dos sete números é o cubo de um número inteiro. Se o maior dos números escritos na folha é N, determina o menor valor possível para N. Dá um exemplo para esse valor de N e explica porque não é possível que N seja mais pequeno.

PROBLEMA 2

Numa competição desportiva em que se realizam várias provas, só participam três atletas A, B e C. Em cada prova, o vencedor ganha x pontos, o segundo classificado ganha y pontos e o terceiro ganha z pontos. Não há empates, e os números x, y, z são inteiros positivos distintos com x maior que y, e y maior que z.
No final da competição, o atleta A conquistou 20 pontos, B conquistou 10 pontos e C conquistou 9 pontos. Sabemos que o atleta A ficou em segundo lugar na prova de 100 metros. Determina qual dos atletas ficou em segundo lugar na prova de salto em comprimento.

PROBLEMA 3

No triângulo $[ABC]$, marcaram-se o ponto D no lado $[BC]$ e o ponto E no lado $[AC]$ de modo que $\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EB} = \overline{BA}$. O ângulo $\angle ACB$ mede 20°. Calcula a medida do ângulo $\angle ADE$.

PROBLEMA 4

Dado um tabuleiro 3×3, pretende-se escrever nas suas quadrículas os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e um número inteiro positivo M, não necessariamente distinto dos anteriores. O objetivo é que a soma dos três números de cada linha seja sempre a mesma.
a) Encontra todos os valores de M para os quais isto é possível.
b) Para quais dos valores de M encontrados em a) é possível distribuir os números de modo que não só as três linhas somem o mesmo mas também as três colunas somem o mesmo?

PROBLEMA 5

No quadro estão escritos os 400 números inteiros 1, 2, 3, ..., 399, 400. O Luís apaga 100 destes números e depois o Martim apaga outros 100. O Martim ganha se a soma dos 200 números apagados é igual à soma dos que não se apagaram; caso contrário, ganha o Luís. Qual dos dois tem estratégia vencedora?
E se o Luís apaga 101 números e o Martim apaga 99?
Em cada caso, explica como, pode garantir a vitória, o jogador que tem a estratégia vencedora.