

XVIII OLIMPIÁDA de MAIO
Primeiro Nível
Maio de 2012



Duração da prova: 3 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Não podes usar máquina de calcular; não podes consultar livros nem apontamentos.

Justifica cada uma das respostas.

Ao participar comprometes-te a não divulgar (colocar na internet) os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

O Paulo afirmou: “Ao dia do meu aniversário adiciono 2 e multiplico o resultado por 2. Ao número obtido adiciono 4 e multiplico o resultado por 5. Ao novo número obtido adiciono o número do mês do meu aniversário (por exemplo, se é junho, adiciono 6) e obtenho 342.”

Qual é a data do aniversário do Paulo? Indica todas as possibilidades.

PROBLEMA 2

Chamamos $S(n)$ à soma de todos os algarismos do inteiro n . Por exemplo, $S(327) = 3 + 2 + 7 = 12$.

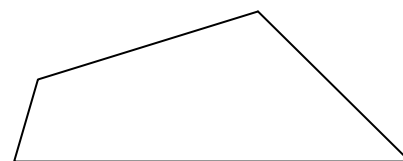
Encontra o valor de

$$A = S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + \dots + S(2011) - S(2012).$$

(A tem 2012 parcelas).

PROBLEMA 3

De um quadrilátero de papel como o da figura, há que recortar um novo quadrilátero cuja área seja igual a metade da área do quadrilátero original. Só se pode dobrar uma, ou mais vezes, e cortar por algumas das linhas das dobragens.



Descreve as dobragens e os cortes e justifica que a área obtida é metade da inicial.

PROBLEMA 4

O Pedro tem 111 fichas azuis e 88 fichas brancas. Há uma máquina que dadas 14 fichas azuis devolve 11 fichas brancas e dadas 7 fichas brancas devolve 13 azuis. Decide se o Pedro pode conseguir, mediante sucessivas operações com a máquina, aumentar em 33 o número total de fichas, de modo que a quantidade de fichas azuis seja igual a $\frac{5}{3}$ da quantidade de fichas brancas.

Se é possível, indica como. Se não é possível, indica porquê.

PROBLEMA 5

Numa reunião há 12 pessoas. Sabe-se que para cada duas pessoas A e B da reunião há (pelo menos) outra pessoa C da reunião que é amiga de A e de B. Determina o número mínimo de pares de amigos que há na reunião.

Cada pessoa pode pertencer a vários pares. Se X é amigo de Y então Y é amigo de X.