

XVI OLIMPÍADA de MAIO
Primeiro Nível
Maio de 2010



Duração da prova: 3 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Não podes usar calculadora; não podes consultar livros nem apontamentos.

Justifica cada uma das tuas respostas.

Ao participar comprometes-te a não divulgar os problemas até 25 de Maio.

PROBLEMA 1

Um recipiente fechado com a forma de um paralelepípedo rectângulo contém 1 litro de água. Se o recipiente se apoia horizontalmente sobre três faces distintas, o nível da água é de 2 cm, 4 cm e 5 cm. Calcula o volume do paralelepípedo.

PROBLEMA 2

Na etapa 0 escrevem-se os números: **1, 1**.

Na etapa 1 intercala-se a soma dos números: **1, 2, 1**.

Na etapa 2 entre cada par de números da etapa anterior 1 intercala-se a soma deles: **1, 3, 2, 3, 1**.

Uma etapa mais: **1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1**.

Quantos números há na etapa 10?

Qual é a soma de todos os números que há na etapa 10?

PROBLEMA 3

É possível pintar os inteiros positivos com três cores de modo que sempre que se somam dois números de cores distintas, o resultado da soma seja da terceira cor? (Há que usar as três cores.) Se a resposta é afirmativa, indica como pintar os números; se não, explica a razão dessa impossibilidade.

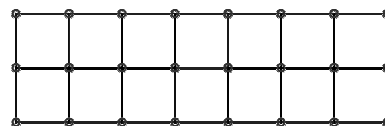
PROBLEMA 4

Encontra todos os números naturais de 90 algarismos que são múltiplos de 13 e têm os primeiros 43 algarismos iguais entre si e distintos de zero, os últimos 43 algarismos iguais entre si, e os 4 algarismos do meio são 2, 0, 1, 0, por esta ordem.

PROBLEMA 5

Num tabuleiro 2×7 quadriculado em quadrados pequenos 1×1 consideram-se os 24 pontos que são vértices dos quadrados pequenos.

O João e o Matias jogam sobre este tabuleiro. O João pinta de vermelho a mesma quantidade de pontos em cada uma das três linhas horizontais. Se o Matias pode escolher três pontos vermelhos que sejam vértices de um triângulo acutângulo, o Matias ganha o jogo.



Qual é a máxima quantidade de pontos que o João pode pintar para ter a certeza que o Matias não ganha? (Para o número encontrado, dá um exemplo da forma de pintar que impeça que o Matias ganhe e justifica a razão de o Matias poder ganhar se esse número for maior.)