XVII Olimpíada Ibero-Americana de Matemática Universitária 2014

22 de novembro de 2014

1. **(3 pontos)** Sejam n e k inteiros positivos tais que $k \leq n$. De quantas formas se podem escolher k intervalos de inteiros no conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ de modo que a intersecção de quaisquer dois deles seja vazia?

   Nota: Um *intervalo de inteiros* é um conjunto de um ou mais inteiros consecutivos.

2. **(4 pontos)** Seja n um inteiro positivo e seja C um círculo fechado em $\mathbb{R}^2$ de área maior que n. Demonstre que existe uma translação de C que contém pelo menos $n+1$ pontos (a, b) com coordenadas $a, b \in \mathbb{Z}$.

3. **(4 pontos)** Escrevem-se todas as fracções $\frac{p}{q}$ com $0 \leq p \leq q$ numa sucessão da seguinte forma:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$$

   À volta de cada fracção $\frac{p}{q}$ construímos um intervalo aberto de amplitude $2^{-(k(p,q)+1)}$ centrado em $\frac{p}{q}$, onde $k(p,q)$ é a posição que corresponde à fracção $\frac{p}{q}$ na sucessão. Mostre que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ não pertence à união dos intervalos.

4. **(5 pontos)** Seja n um inteiro maior ou igual a 3. Consideremos os números complexos $a_k = k + i\sqrt{k^2 - 1}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Seja $p(x)$ o polinómio $(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$. Mostre que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{p'(x)}\, dx = 0.$$

5. **(5 pontos)** Mostre que existe uma função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciável com derivadas contínuas em $[0, 1]$ tal que para qualquer função $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua em $[0, 1]$ e qualquer $\epsilon > 0$ existe um número N e números reais $a_0, a_1, \ldots, a_N$ tais que

$$\int_0^1 \left(g(x) - \sum_{i=0}^{N} a_i f^{(i)}(x) \right)^2 dx < \epsilon.$$

   Nota: Aqui $f^{(i)}$ denota a $i-$ésima derivada de f se $i > 0$ e $f^{(0)} = f$.

6. **(6 pontos)** Sejam a, b, c números reais positivos distintos. Definimos $L(a,b,c)$ como

$$\frac{2a}{(\log a - \log b)(\log a - \log c)} + \frac{2b}{(\log b - \log c)(\log b - \log a)} + \frac{2c}{(\log c - \log a)(\log c - \log b)}.$$

Prove que

$$\sqrt[3]{abc} \leq L(a,b,c) \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

Nota: $L(a,b,c)$ é conhecida como a *média logarítmica* dos números a, b, c.

7. **(7 pontos)** Seja q uma potência de um primo ímpar p. Seja $\mathbb{F}_q$ o corpo finito de ordem q e $GL_2(q)$ o conjunto das matrizes invertíveis 2×2 com entradas em $\mathbb{F}_q$. Se $M \in GL_2(q)$, então definimos a *ordem* de M como o menor inteiro positivo k tal que $M^k = I$, a matriz identidade. Prove que

   (a) Se $\det(M) = 1$, então a ordem de M divide $q-1$, $q+1$ ou $2p$.

   (b) Se t é um inteiro positivo que divide $q-1$, $q+1$ ou $2p$, então existe $M \in GL_2(q)$ tal que $\det(M) = 1$ e a ordem de M é t.