XVI Olimpíada Ibero-Americana de Matemática Universitária 2013

16 de novembro de 2013

1. **(3 pontos)** Uma cidade X tem 2013 pessoas. Quando se ordenam as pessoas de forma crescente pela quantidade de dinheiro que têm, a $n-$ésima pessoa tem n vezes a quantidade de dinheiro que tem a mais pobre. Num dado momento específico, todos os cidadãos de X decidem fazer o seguinte: cada um reparte equitativamente a maior parte possível da sua riqueza entre todos os cidadãos de X e dá o que sobra à cidade vizinha Y.

   Sabemos que a quantidade de dinheiro da pessoa mais pobre de X não é divisível nem por 3, nem por 11 e nem por 61. Determina a quantidade de dinheiro total que foi dado à cidade Y.

2. **(4 pontos)** Seja V um espaço vectorial de dimensão infinita com produto interno e $S \subseteq V$ um subespaço não trivial de dimensão infinita. Seja $x \in V \setminus S$ e W o espaço gerado por x. Determina a dimensão de $(S \oplus W) \cap S^{\perp}$.

3. **(4 pontos)** Consideremos o número

$$\alpha = 0.123456789101112\ldots$$

   formado ao escrever, depois do ponto, todos os inteiros positivos por ordem crescente.

   Mostra que, para todo o inteiro positivo k, o conjunto

$$A_k := \{10^{nk}\alpha - \left\lfloor 10^{nk}\alpha \right\rfloor : n \in \mathbb{N}\}$$

   é denso em $[0, 1]$.

   Nota: $\lfloor x \rfloor$ designa o maior inteiro menor ou igual a x.

4. **(5 pontos)** Seja $ABCD$ un quadrilátero inscrito numa circunferência com centro O_1 e raio R, e circunscrito noutra circunferência com centro O_2 e raio r. Mostra que

$$(O_1O_2)^2 = R^2 - 2rR + r(2r - r_1 - r_2)$$

   onde r_1 e r_2 são os raios das circunferências inscritas nos triângulos ABC e ADC, respectivamente.

5. **(5 pontos)** Os elementos de um grupo finito comutativo G com $|G| = N$ são pintados com três cores, amarelo, azul e vermelho, de modo que cada cor não é utilizada mais do que $N/2$ vezes.

   Seja A o conjunto de todas as sequências ordenadas $(x, y, z, w) \in G^4$, tal que $xyzw = e$ e x, y, z, w têm a mesma cor. Analogamente, seja B o conjunto de todas as sequências ordenadas $(x, y, z, w) \in G^4$ tal que $xyzw = e$, os elementos x, y têm a mesma cor, e z e w também têm a mesma cor, mas as duas cores são distintas. Prova que $|A| \leq |B|$.

6. **(6 pontos)** Uma função real $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é limitada e diferenciável. Além disso, satisfaz a relação

$$f(x)f'(x) \geq \sin(x).$$

   Existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$?

7. **(8 pontos)** O António e a Bela jogam o seguinte jogo: o António escolhe um inteiro positivo k e, em seguida, a Bela um segundo inteiro positivo n. Começando o António, eles colocam alternadamente pontos num plano (cada um diferente a todos os anteriores) até que cada um tenha colocado n pontos. A Bela vence se o número de rectas que passam pelo menos por dois pontos dos colocados é divisível por k. Caso contrário, vence o António. Qual dos jogadores tem uma estratégia vencedora?