XV Olimpíada Ibero-Americana de Matemática Universitária 2012

17 de Novembro de 2012

1. **(3 pontos)** Seja $\mathbb{Z}$ o anel dos inteiros. Os conjuntos $\mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z}$ e $3\mathbb{Z}$ são semigrupos relativamente à multiplicação. Quais são isomorfos?

   Obs: Note-se que um semigrupo é um conjunto não vazio com uma operação binária associativa. Dois semigrupos G e H são isomorfos se existe uma bijeção f entre eles tal que ela e a sua inversa preservam a operação do semigrupo.

2. **(4 pontos)** Sejam n um inteiro positivo e $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, diferenciável em $(0,1)$, com $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Mostre que existem n reais distintos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(\alpha_k)} = n.$$

3. **(4 pontos)** Encontre todos os ternos (x, y, z) de inteiros que satisfazem

$$x^2 + 7y^2 = 2012z^2.$$

4. **(4 pontos)** Determine a natureza da seguinte série e, no caso de ser convergente, calcule o seu valor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right).$$

5. **(6 pontos)** Seja M uma matriz quadrada de ordem 3 com elementos inteiros e determinante igual a 1. Mostre que existe um vetor $v \in \mathbb{Z}^3$ tal que $v^T M v = 1$.

6. **(6 pontos)** Um conjunto de pontos é *sorteado* se não há 3 pontos alinhados, não há 4 pontos numa mesma circunferência e para quaisquer 5 pontos distintos A, B, C, D e E os triângulos ABC, ACD e ADE têm circunraios distintos.

   Mostre que se temos um conjunto *sorteado* de 2012 pontos no plano, então é possível escolher 8 entre eles tal que todos os triângulos que se podem fazer com cada três deles têm circunraios distintos.

   Obs: O circunraio de um triângulo ABC é o raio da circunferência que passa por A, B e C.

7. **(7 pontos)** Seja $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ o disco unitário no plano complexo e $0 < a < 1$ um número real. Suponhamos que $f : D \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa tal que $f(a) = 1$ e $f(-a) = -1$.

(a) Mostre que:

$$\sup_{z \in D} \bigl|f(z)\bigr| \geq \frac{1}{a}.$$

(b) Mostre que se f não tem raízes então:

$$\sup_{z \in D} \bigl|f(z)\bigr| \geq \exp\left(\frac{1-a^2}{4a}\pi\right).$$