XI Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária

8 de Novembro de 2008

Problema 1 (5 pontos) Seja n um número inteiro positivo que não é divisível nem por 2 nem por 5. Na representação decimal infinita do número $\frac{1}{n} = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ escolhem-se arbitrariamente um número finito de dígitos depois da vírgula e apagam-se os restantes. Claramente o número decimal obtido é também racional e por isso tem a forma $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros. Prove que b é divisível por n.

Problema 2 (5 pontos) Prove que para cada número natural n existe um polinómio $f(x)$ com coeficientes reais, de grau n, tal que o polinómio $p(x) = f\left(x^2 - 1\right)$ é divisível por $f(x)$ no anel $R[x]$.

Problema 3 (5 pontos) Prove a desigualdade $x + \frac{1}{x^x} < 2$ para $0 < x < 1$.

Problema 4 (6 pontos) Dois vértices A e B de um triângulo ABC estão localizados numa parábola $y = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$ de tal forma que os lados AC e BC são tangentes à parábola. Sejam m_c a longitude da mediana CC_1 do triângulo ABC e S a área do triângulo ABC. Determine

$$\frac{S^2}{m_c^3}.$$

Problema 5 (6 pontos) Determine todos os números inteiros positivos n para os quais existem números inteiros positivos $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ tal que

$$\left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right) - \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)^2 = n.$$

Problema 6 (6 pontos)

a) (2 pontos) Determine se existem ou não matrizes $A, B, C \in SL_2(Z)$ que satisfaçam a condição $A^2 + B^2 = C^2$.

b) (4 pontos) Determine se existem ou não matrizes $A, B, C \in SL_2(Z)$ que satisfaçam a condição $A^4 + B^4 = C^4$.

A notação $A \in SL_2(Z)$ significa que A é uma matriz de dimensão 2×2 com entradas inteiras e $\det A = 1$.

Problema 7 (7 pontos) Seja A um grupo aditivo abeliano sem elementos periódicos não nulos e tal que para cada número primo p se verifica a desigualdade $|A/pA| \leq p$, onde $pA = \{pa \,|\, a \in A\}$, $pa = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{p \text{ vezes}}$ e $|A/pA|$ é a cardinalidade do grupo quociente A/pA (o índice do subgrupo pA).

Demonstre que cada subgrupo do grupo A de índice finito é isomorfo ao mesmo grupo A.