X Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária

Outubro de 2007

1. (4 pontos) Para cada par de inteiros positivos $(i,\, k)$ com $1 \leq i \leq k$ define-se a transformação linear $P_{i,\,k} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ como

$$P_{i,\,k}\left((a_1,\, \ldots,\, a_{i-1},\, a_i,\, a_{i+1},\, \ldots,\, a_k)\right) = \left((a_1,\, \ldots,\, a_{i-1},\, 0,\, a_{i+1},\, \ldots,\, a_k)\right).$$

   Prove que para todo $n \geq 2$ e para qualquer conjunto de $n-1$ vectores linearmente independentes $v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_{n-1}$ em $\mathbb{R}^n$, existe um inteiro k, $1 \leq k \leq n$, de forma que os vectores $P_{k,\,n}(v_1),\, P_{k,\,n}(v_2),\, \ldots,\, P_{k,\,n}(v_{n-1})$ são linearmente independentes.

2. (5 pontos) Prove que para todo n inteiro positivo e para todo número real $0 \leq x \leq 1$ verifica-se a desigualdade

$$\left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)^n - (1-x)^n \leq \frac{x}{2}.$$

3. (6 pontos) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função continua e periódica. Demonstre que para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ verifica-se a desigualdade

$$\int_0^T \frac{f(x)}{f(x+\alpha)}dx \geq T,$$

   onde T é o período de $f(x)$.

4. (6 pontos) Considere uma sucessão infinita $a_1,\, a_2,\, \ldots$, onde os termos a_n pertencem todos ao conjunto $\{1,\, 2\}$. Diz-se que um número natural de n dígitos é *bom* se a sua representação decimal é da forma $a_r a_{r+1} \ldots a_{r+(n-1)}$ para algum inteiro positivo r. Suponha que há pelo menos 2008 números bons com um milhão de dígitos. Demonstre que há pelo menos 2008 números bons com 2007 dígitos.

5. (6 pontos) Determine todos os pares de polinómios $f,\, g \in \mathbb{C}[x]$ com coeficientes complexos tais que se verifiquem as igualdades

$$\begin{aligned} f(f(x)) - g(g(x)) &= 1 + i, \\ f(g(x)) - g(f(x)) &= 1 - i \end{aligned}$$

   para todo $x \in \mathbb{C}$.

6. (7 pontos) Sejam F um corpo de característica diferente de 2, $F^* = F \setminus \{0\}$ o seu grupo multiplicativo e T o subgrupo de F^* constituido por todos os seus elementos de ordem finita.

   Demonstre que se T é finito então T é cíclico de ordem par.

7. (7 pontos) Define-se a *altura* de um número natural a como a fracção $\frac{s(a)}{a}$, onde $s(a)$ é a soma de todos os divisores positivos de a. Demonstre que para qualquer par de números naturais N, k existe um b natural tal que a altura de cada um dos números $b,\, b+1,\, \ldots,\, b+k$ é maior que N.