VI OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
8 DE NOVEMBRO DE 2003

PROBLEMA 1. [5 pontos]

Seja $f_0(x) = \log x$, o logaritmo natural de x.

Defina, para todo o inteiro $n \geq 0$, $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^x f_n(t)dt$. Prove que o seguinte limite existe e está no intervalo $[-1, 0)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} f_n(n).$$

PROBLEMA 2. [5 pontos]

Prove que se $p(x)$ é um polinómio com coeficientes inteiros então existe um inteiro n tal que $p(n)$ tem mais de 2003 factores primos distintos.

PROBLEMA 3. [5 pontos]

Algumas crianças estão a brincar ao "telefone sem fios". A criança C_0 sussurra três palavras à criança C_1, que sussurra o que ouviu à criança C_2 e assim por diante até uma mensagem chegar à criança C_n. Cada uma das três palavras tem exactamente uma "gémea" errada (por exemplo, as palavras ração e razão são "gémeas" pois é muito fácil confundi-las).

Cada criança $(i+1)$ tem $1/2$ de probabilidade de ouvir correctamente o que a criança i falou, tem $1/6$ de probabilidade de trocar a primeira palavra dita pela criança i pela sua "gémea", $1/6$ de probabilidade de trocar a segunda palavra e $1/6$ de probabilidade de trocar a terceira palavra (e portanto nunca troca mais de uma palavra). Note que numa troca a mensagem pode ser acidentalmente corrigida.

Calcule a probabilidade da criança C_n ouvir exactamente a mensagem original.

PROBLEMA 4. [5 pontos]

Uma família $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de conjuntos é dita (a, b)-*uniforme* se $|A_i| = a$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $|A_i \cap A_j| = b$ para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

Prove que dados a e b existe $N_{a,b}$ tal que se $n > N_{a,b}$ e $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é uma família (a, b)-*uniforme* então $\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| = b$.

(v.s.f.f)

PROBLEMA 5. [7 pontos]

Seja z uma raiz da equação $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$, onde $0 \leq a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \leq k$. Prove que:

(i) Se $Re\, z > 0$ então $|z| < 1 + \sqrt{k}$ (onde $Re\, z$ é a parte real de z).

(ii) $Re\, z < 1 + \sqrt[3]{k}$.

PROBLEMA 6. [7 pontos]

Sejam $A = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Prove que $B^{\varepsilon_1} A^{s_1} B A^{s_2} B \ldots A^{s_n} B^{\varepsilon_2} \neq I$, para quaisquer $n \geq 1$, $\varepsilon_i \in \{0,1\}, i = 1,2$ e $s_i \in \{-1,1\}, 1 \leq i \leq n$, onde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 7. [8 pontos]

Prove que $tan(z) = z \Longrightarrow z \in \mathbb{R}$, onde, para $z \in \mathbb{C}$, $sen(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ e $tan(z) = \dfrac{sen(z)}{coz(z)}$.